

## Расчет светопрозрачных элементов заполнения проемов из поликарбоната

**Божанов Павел Валерьевич**

кандидат технических наук, генеральный директор ООО «Инженерный центр промышленного проектирования», bozhanov130776@yandex.ru

Широкое применение конструктивных элементов из поликарбоната требуют теоретически обоснованных методов расчета, учитывающих дилатационные свойства рассматриваемого материала. С одной стороны, склонность к дилатации у поликарбоната особенно ярко проявляется при высоком уровне напряжений, при котором происходит образование пластических деформаций, а с другой стороны, зависит от вида напряженного состояния. В связи с этим, особенную практическую ценность для прикладных инженерных расчетов имеют решения задач по определению предельного состояния конструкций при сложных видах напряженного состояния, ярким примером которого может служить изгиб тонких пластинок. Именно к указанным типам конструкций относятся элементы светопрозрачного заполнения проемов. В настоящей статье решена задача по определению предельного состояния тонких квадратных пластин, находящихся под воздействием поперечной нагрузки. Были рассмотрены два вида опирания плиты: подвижное защемление контура и свободное опирание. Расчет проводился по двум вариантам расчета. В первом варианте при развитии пластических деформаций учитывались дилатационные свойства поликарбоната. Во втором случае использовались классические подходы, не учитывающие специфических свойств рассматриваемого материала. Получены картины развития пластичности по поверхности пластин и распространение по глубине сечения при увеличении уровня нагрузки. Построены графики зависимости прогибов центральной точки от величины интенсивности поперечной нагрузки. Проведено сравнение полученных результатов и установлено, что игнорирование склонности поликарбоната к дилатации и пластическому разрыхлению приводит к значительной разнице в значениях нагрузок, соответствующих предельному состоянию и не может быть допустимым обстоятельством при выполнении инженерных расчетов конструкций, выполненных из рассматриваемого материала.

**Ключевые слова:** поликарбонат, пластины, предельное состояние, изгиб, дилатирующие материалы, полимеры

Светопрозрачное заполнение проемов, с расчетной точки зрения, выполняется в виде тонких пластин. Как известно, несущая способность пластин не ограничивается переходом материала из упругого состояния в пластическое в какой – либо отдельно взятой точке, а определяется исходя из значения внешнего усилия, при котором возможно образование пластического шарнира. Таким образом, задача по определению несущей способности рассматриваемых элементов должна ставиться с учетом развития упруго – пластических деформаций. Экспериментальные данные [1] свидетельствуют о том, что образование пластических деформаций в поликарбонате зависит от вида напряженного состояния.

Для определения исходной точки, при которой в материале начинают возникать пластические деформации, воспользуемся подходом, изложенным в работах [3,4]. Условие пластичности для дилатирующих разносопротивляющихся материалов предлагается сформулировать в достаточно общем для указанного класса материалов виде

$$F(\sigma_{ij}) = \tau \cdot f(\xi) = k_{\tau} \quad (1)$$

где  $f(\xi)$  – функция вида напряженного состояния;

$\xi = \sigma / S_0$  – октаэдрическое нормальное нормированное напряжение;

$$\sigma = \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} / 3 \quad \text{– среднее напряжение,}$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma \quad \text{– девиатор напряжений;}$$

$\tau = \sqrt{S_{ij} \cdot S_{ij} / 3}$  – касательное напряжение на октаэдрической площадке;

$S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке;

$k_{\tau} = \sqrt{2/3} \cdot \tau_S$ , где  $\tau_S$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Функция  $f(\xi)$ , входящая в выражение (1) определяется из экспериментальных зависимостей деформационных характеристик поведения материала, полученных при сложных видах напряженного состояния. В работе [5] была проведена обработка экспериментальных диаграмм напряженно – деформированного состояния образцов из поликарбоната, полученная при сдвиге и растяжении под различными значениями гидростатического давления и предложена аппроксимация функции вида напряженного состояния в форме (2). Значение константы  $k_\tau$  принималось равным 33,0 МПа.

$$\left. \begin{aligned} f(\xi) &= 1 + 0,377\xi, \text{ при } -1 \leq \xi < 0 \\ f(\xi) &= 1 - 0,339\xi, \text{ при } 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Обозначим основные гипотезы и предпосылки, принятые при решении изгиба пластин из поликарбоната за пределом упругости при конечных прогибах:

Используются обычные положения технической теории изгиба тонких пластин - гипотеза плоских сечений и гипотеза плоского напряженного состояния.

Диаграмма напряжений – деформаций материала обладает ярко выраженной площадкой текучести, что позволяет применить модель идеального упруго – пластического тела.

Нагружение считается простым.

Задача по изгибу пластин решается в нелинейной постановке.

Задача по исследованию напряженно – деформирования состояния пластин в нелинейной постановке сводится к решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений [6]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= E \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} &= \\ = \frac{h}{D} \left( \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости материала,  $q$  – интенсивность распределенной нагрузки,  $h$  – толщина пластины,

$$D = \frac{E h^3}{3(1 - \mu^2)}$$

$\mu$  – коэффициент Пуассона.

Первое выражение в системе (3) является уравнением совместности или неразрывности деформаций, записанное через функции напряжений  $\varphi(x_1, x_2)$  и прогибов  $\omega(x_1, x_2)$ , второе – является уравнением равновесия, записанное

через изгибающие моменты  $M_{ij}$ , а также функции напряжений и прогибов пластины. Причем функция напряжений непосредственно связана с продольными усилиями  $N_{ij}$  следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} N_{11} &= h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad N_{22} = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \\ N_{11} &= -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned}$$

Система нелинейных уравнений (3) определяет работу пластины в упругой стадии работы материала.

Рассмотрим состояние пластины, когда в материале появляются пластические деформации. Очевидно, что в начале подобного процесса, пластичность будет возникать только с одной стороны пластины, либо в нижней, либо в верхней зонах, как показано на рис. 1.а. Данное утверждение основывается на двух обстоятельствах. Во – первых, при больших прогибах в срединной плоскости возникает растягивающее продольное усилие, которое с одной стороны увеличивает растягивающие напряжения от изгиба и соответственно уменьшает сжимающие изгибные напряжения. Во – вторых, введение функции вида напряженного состояния приводит к зависимости появления пластичности в верхней и нижней зонах от соотношения компонент напряжений в указанных зонах, которые будут различаться между собой, что приведет, в конечном счете, к разнице пределов текучести для одной и той же точки на плоскости пластины, но с разными координатами по её толщине. Следует обратить особое внимание, что последнее замечание подтверждается экспериментальными данными, которые были приведены в начале статьи.

С увеличением уровня нагрузки пластичность будет развиваться по глубине пластины и, в определенный момент, компоненты напряженного состояния могут достигнуть величин, при которых образуется текучесть в противоположной зоне сечения от первоначально зафиксированного положения пластичности в рассматриваемом сечении. В таком случае, в сечении пластины будет наблюдаться двусторонняя пластичность, показанная на рис. 1.б. На рис.1 введены следующие обозначения:  $A_{ij}$  – напряжения вызывающие текучесть в нижней зоне;  $B_{ij}$  – напряжения вызывающие текучесть в верхней зоне;  $a_{ij}, b_{ij}$  – координаты зон пластичности отсчитываемые от срединной поверхности по

толщине пластины;  $c_{ij}$  – координата нейтральной оси сечения, в которой напряжения принимают нулевые значения и отсчитываемая от срединной поверхности по толщине пластины. Следует отметить, что зоны распространения пластичности по толщине пластины  $a_{ij}, b_{ij}$  одинаковы для каждого определенного сечения, поскольку они формируются комплексным соотношением напряжений  $\sigma_{ij}$ , а не каждым отдельно взятым напряжением. Вследствие этого будет удобно опустить в дальнейших математических выкладках индексы для указанных величин, приняв для них общие обозначения  $a, b$ . С другой стороны, зоны пластичности являются функциями координат поверхности пластины, поскольку определяются в конкретной точке.

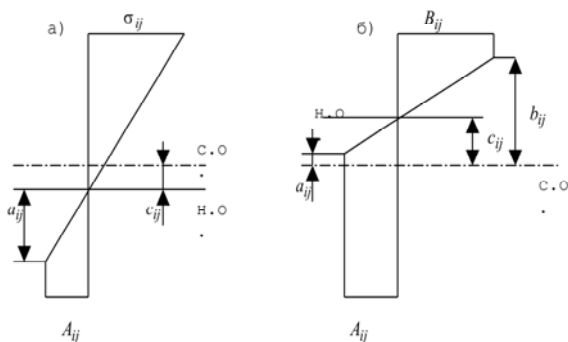


Рис. 1

Очевидно, что с ростом нагрузки будет происходить ослабление поперечного сечения пластин за счет развития пластичности, при принятой модели идеального упруго – пластического тела, и соответственно будет уменьшаться значение цилиндрической жесткости пластины. При принятых ранее обозначениях и, в соответствии с рис.1, значение цилиндрической жесткости, ослабленного пластичностью сечения пластины –  $S$ , определится, как показано в работе [7] следующим выражением:

$$S = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - \mu^2)} \quad (4)$$

Поскольку зоны пластичности, помимо зависимости от уровня нагрузки, также связаны с координатами расположения точки на поверхности пластины, то цилиндрическая жесткость пластины, ослабленная текучестью, тоже будет являться функцией системы координат поверхности пластины. Определение аналитической формы записи рассматриваемой функции, если и возможно чисто теоретически, то практического смысла не имеет, поскольку систему нелинейных дифференцированных уравнений (3)

предлагается вначале линеаризовывать численным методом последовательных нагружений, как рекомендовано в работе [8], а затем решать линеаризованную систему методом конечных разностей. При описанном ранее подходе, значение функции  $S$  будет определено в каждом узле сетки пластины численно, что позволит определить интегральные характеристики напряженно – деформированного сечения пластины, без поиска аналитических определений рассматриваемой функции.

Система двух нелинейных дифференциальных уравнений (3), с учетом сделанных замечаний и обозначений, принятых в формуле (4), после несложных преобразований, в соответствие с работой [7] запишется в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= E \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] \\ S \cdot \left( \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) &= \\ = - \left( q + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Линеаризация системы двух нелинейных дифференциальных уравнений (5), как указывалось ранее, проводилась методом последовательных нагружений, как рекомендовано в работе [8]. Линеаризованная система уравнений (5) будет иметь следующую форму записи:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \delta \varphi + \nabla_{\chi}^2 \delta \omega &= 0 \\ \nabla_{\chi}^2 \delta \varphi + S \cdot \nabla^4 \delta \omega - \nabla_q^2 \delta \omega &= -\delta q \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}; \\ \nabla_{\chi}^2 &= -\chi_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \chi_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2\chi_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ \nabla_q^2 &= N_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + N_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \end{aligned}$$

$\delta \varphi, \delta \omega$  – приращения функции напряжений и прогибов, соответствующих малому увеличению внешней нагрузки  $\delta q$ ;

$S, N_{11}, N_{22}, N_{12}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$  – начальные характеристики системы, соответствующие определенному уровню внешней нагрузки.

Решение системы линеаризованных уравнений (6) проводилось численным методом конечных разностей [9].

Расчет проводился по двум вариантам: в первом варианте в качестве условия предельного состояния использовалось уравнение (1), а аппроксимация функции вида напряженного со-

стояния принималась по выражению (2); во втором варианте расчета в качестве условия предельного состояния применялась классическое уравнение Треска – Мизеса – Генки [10], не учитывающее зависимость деформационных характеристик от вида напряженного состояния. Условие пластичности (2) легко приводится к классическому условию Треска – Мизеса – Генки [10], при  $f(\xi) = 1(const)$ .

Расчет выполнялся для двух видов опирания: в первом случае принималась подвижная заделка контура пластины; во втором принималось шарнирно подвижное опирание контура. Пластина принималась квадратной в плане, толщиной  $h$  равной 4,0 см, длина и ширина пластины – 80,0 см, модуль упругости – 2485 МПа, коэффициент поперечной деформации – 0.39. Поверхность пластин была покрыта сеткой 20x20. В силу симметрии рассчитывалась четвертая часть пластины.

**Результаты расчета квадратной пластины с подвижным защемлением контура.** Пластичность, при расчете пластины для первого варианта расчета возникает впервые в верхней зоне пластины в точке X (рис.2.а). Нагрузка, соответствующая появлению пластичности составила 1.03 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 8.14 МПа. Полученные картины распространения пластичности по верхней поверхности пластины при нагрузке 3.2 МПа приведены на рис. 2.а, по нижней поверхности на рис. 2.б. На рис. 2.в и 2.г. приведены аналогичные картины распространения пластичности при нагрузке 5.0 МПа. На рис. 3.а и 3.б приведены картины распространения пластичности по глубине пластины поперечного сечения при указанных ранее значениях нагрузки соответственно.

Пластичность, при расчете пластины для второго варианта расчета (при  $f(\xi) = 1$ ) возникает в верхней зоне пластины в точке X. Нагрузка, соответствующая появлению текучести составила 0.70 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 4.85 МПа.

Сравнительная диаграмма прогибов центральной точки приведена на рис. 4, где сплошной линией показаны прогибы полученные при расчете пластины по условию (1), пунктиром – при расчете по классическому варианту расчета.

**Результаты расчета квадратной пластины с шарнирно подвижным опиранием контура.** Пластичность, при расчете пластины для первого варианта расчета возникает впервые в нижней зоне пластины при нагрузке 0.76 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 6.56

МПа. Полученные картины распространения пластичности по нижней поверхности пластины при нагрузках 1.8 МПа и 3,5 МПа приведены на рис. 5.а, и 5.б. соответственно. На рис. 6.а и 6.б приведены картины распространения пластичности по глубине пластины поперечного сечения при указанных ранее значениях нагрузки.

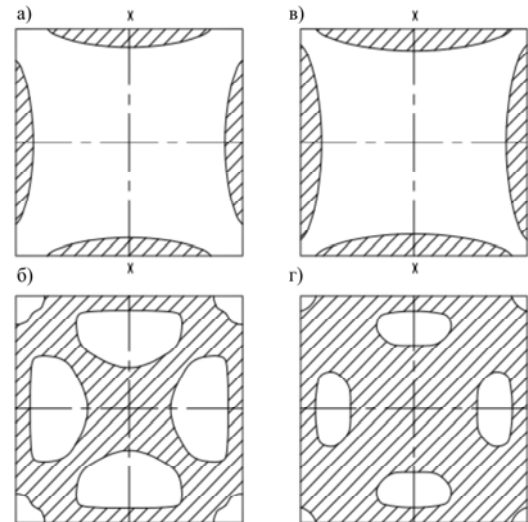


Рис. 2

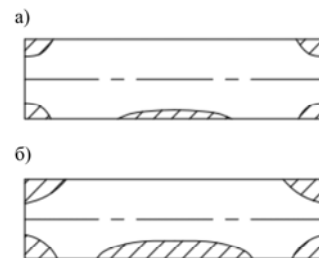


Рис.3

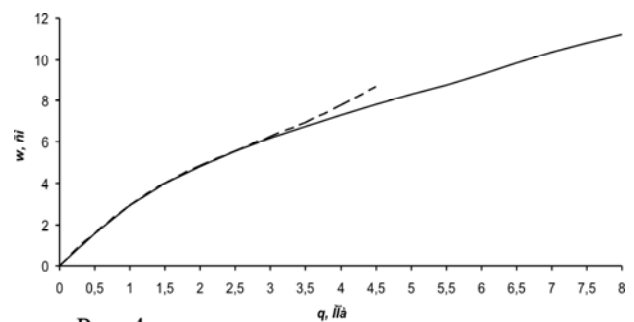


Рис. 4

Пластичность, при расчете пластины для второго варианта расчета (при  $f(\xi) = 1$ ) возникает в нижней зоне пластины при нагрузке 0.72 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 3.64 МПа.

Сравнительная диаграмма прогибов центральной точки приведена на рис. 7, где сплошной линией показаны прогибы полученные при расчете пластины по условию (1), пунктиром – при расчете по классическому варианту расчета.

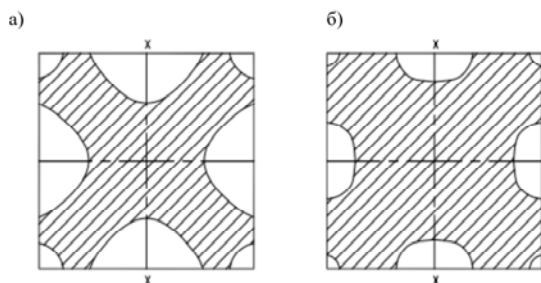


Рис. 5



Рис. 6

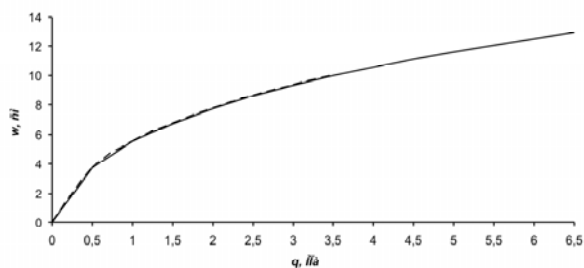


Рис. 7

Проводя сравнительный анализ, выполненный по полученным результатам расчетов, можно сделать следующие выводы:

Пластические деформации при расчете по условию (1) возникают в пластине при больших нагрузках, чем при расчете по классическому критерию Треска – Мизеса – Генки [10]. Для пластины с подвижным защемлением контура такое отличие составляет 32%, для пластины с шарнирно подвижным опиранием – 6%.

Пластический шарнир при расчете при расчете по условию (1) возникают в пластине при больших нагрузках, чем при расчете по классическому критерию Треска – Мизеса – Генки [10]. Для пластины с подвижным защемлением контура нагрузки различаются на 40%, для пластины с шарнирно подвижным опиранием – на 45%.

### Литература

1. Айнбиндер С. Б., Алксне К. И., Тюнина Э.Л., Лака М. Г. Свойства полимеров при высоких давлениях. – М.: Химия, 1973. – 192с.
2. Silano A.A., Bhateja S.K., Pae K.D. Effects of Hydrostatic Pressure on the Mechanical Behavior of Polymers: Polyurethane, Polyoxymethylene, and

Branched Polyethylene //International Journal of Polymeric Materials. - 1974, vol. 3, N 2, p. 117-131.

3. Трещёв А.А. Зависимость предельного состояний конструкционных материалов от вида напряженного состояния //Известия Вузов. – Строительство. - №10. – 1999. – С. 13 - 18.

4. Трещев А.А., Божанов П.В. Об ограниченности применения классического подхода при исследовании пластического изгиба пластин из дилатирующих материалов// Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2004. - №2. – С. 53 – 57.

5. Божанов П.В., Захарченко В.А., Трещев А.А. Упруго – пластический изгиб прямоугольных пластин из изотропных дилатирующих материалов при больших прогибах.// Строительная механика и расчет сооружений. – 2008. – №6. – С. 55 – 60.

6. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 647 с.

7. Божанов П.В., Трещев А.А. Определение прочностных критериев при возникновении пластических деформаций в поликарбонате// Инновации и инвестиции. – 2018. – №12. – С. 323 – 326.

8. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов: СГУ. 1975. – 119 с.

9. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. К.: Изд-во АН УССР. - 1957. – 339 с.

10. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1968. –191 с.

### Calculation of translucent elements for filling openings made of polycarbonate

Bozhanov P.V.

LLC «Engineering Center for Industrial Design»

The widespread use of polycarbonate structural elements requires theoretically grounded calculation methods that take into account the dilatation properties of the material in question. On the one hand, the tendency to dilation in polycarbonate is especially pronounced with a high level of stress, at which plastic deformations occur, and on the other hand, it depends on the type of stress state. In this regard, of particular practical value for applied engineering calculations are the solutions aimed to determine the limiting state of structures for complex types of stress state, an example of which is the bending of thin plates. These types of structures include elements for translucent openings filling. This article solves the problem of determining the limiting state of thin square plates under the influence of a transverse load. Two types of plate support have been considered: moving clamping of the contour and free bearing. The calculation was carried in two variants. In the first variant, in the development of plastic deformations, the dilatation properties of polycarbonate were taken into account. In the second case, classic approaches were used that did not consider the specific properties of the material in question. The picture of the development of plasticity over the surface of the plates and the distribution along the depth of the section with increasing load level has obtained. The graphs of the deflection of the central point versus the intensity of

the transverse load have been plotted. The obtained results were compared and it was found that ignoring the tendency of polycarbonate to dilation and plastic loosening leads to a significant difference in the values of the loads corresponding to the limit state and cannot be a permissible circumstance when performing engineering calculations of structures made of the material under consideration.

Keywords: polycarbonate, plates, limit state, bending, dilating materials, polymers

## References

1. Ainbinder S. B., Alksne K. I., Tyunina E. L., Laka M. G. Properties of polymers at high pressures. - M.: Chemistry, 1973. - 192s.
2. Silano A.A., Bhateja S.K., Pae K.D. Hydrostatic Effects of Polymers: Polyurethane, Polyoxymethylene, and Branched Polyethylene // International Journal of Polymeric Materials. - 1974, vol. 3, N 2, p. 117-131.
3. Treschev A.A. Dependence of limiting states of structural materials on the type of stress state // News of universities. - Building. - №10. - 1999. - pp. 13-18.
4. Treschev A.A., Bozhanov P.V. On the limitations of the use of classical approaches in the study of plastic bending plates from dilating materials // Problems of mechanical engineering and automation. - 2004. - №2. - pp. 53 - 57.
5. Bozhanov P.V., Zakharchenko V.A., Treshchev A.A. Elastic - plastic bending of rectangular plates of isotropic dilating materials with large deflections. // Structural mechanics and calculation of structures. - 2008. - №6. - S. 55 - 60.
6. Timoshenko S.P., Voinovsky - Krieger S. Records and shells. - M.: Fizmatgiz, 1963. - 647 p.
7. Bozhanov P.V., Treshchev A.A. Determination of strength criteria for the occurrence of plastic deformations in polycarbonate // Innovations and investments. - 2018. - №12. - p. 323 - 326.
8. Petrov V.V. The method of successive loads in the nonlinear theory of plates and shells. - Saratov: SSU. 1975. - 119 p.
9. Varvak P.M. Development and application of the grid method to the calculation of plastinoc. K.: Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. - 1957. - 339 p.
10. Goldenblat I.I., Kopnov V.A. Criteria of strength and plasticity of structural materials. - M.: Mashinostroenie, 1968. - 191 p.