«Региональное развитие: электронный научно-практический журнал» E-ISSN 2410-1672 http://regrazvitie.ru
Выпуск № 4(8), 2015 http://regrazvitie.ru/2015/06/
URL статьи: http://regrazvitie.ru/o-svojstvah-sovmestnogo-raspredeleniya-standartizovannyh-maksimuma-i-minimuma-vychislennyh-po-normalno-raspredelennoj-vyborke/

УДК 519.243

О свойствах совместного распределения стандартизованных максимума и минимума, вычисленных по нормально распределенной выборке

© 2015 Ширяева Людмила Константиновна
доцент, кандидат физико-математических наук
Самарский государственный экономический университет
E-mail: Shiryeva_LK@mail.ru

Ключевые слова: стандартизированные максимум и минимум, совместное распределение односторонних статистик Граббса, нормальное распределение, хи-плоты.

Аннотация. Рассмотрены односторонние статистики Граббса, т.е. стандартизированные максимум и минимум, вычисленные по нормальной выборке. Исследованы свойства функции совместного распределения этих статистик. Приведены примеры графиков интегральной функции и плотности совместного распределения односторонних статистик, а также хи-плота.

On the properties of joint distribution of the standardized maximum and standardized minimum for a normal sample

© 2015 Shiryaeva Ludmila Konstantinovna
assistant professor, candidate of Phisical and Mathematical Sciences
E-mail: Shiryeva_LK@mail.ru

Key words: standardized maximum and minimum, one-sided Grubbs statistics, joint distribution function of standardized maximum and minimum, normal distribution, chi-plots.

Abstract. We investigate the joint distribution of one-sided Grubbs statistics for a normal sample. Those statistics are standardized maximum and standardized minimum. We note some properties of the joint distribution function. We give the examples of plots of joint distribution function and joint density of Grubbs statistics. Besides we construct a chi-plot.

Выходные сведения статьи:

Ширяева Л.К. О свойствах совместного распределения стандартизованных максимума и минимума, вычисленных по нормально распределенной выборке // Региональное развитие: электронный научно-практический журнал. 2015. № 4(8). URL: http://regrazvitie.ru/o-svojstvah-sovmestnogo-raspredeleniya-standartizovannyh-maksimuma-i-minimuma-vychislennyh-po-normalno-raspredelennoj-vyborke/ (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

1. Введение

Общеизвестно, что экономические показатели, по сути своей, являются случайными переменными. Экономические показатели не существуют изолированно друг от друга, а являются взаимосвязанными. Их совместные распределения часто оказываются негауссовыми [1]. Поэтому исследование совместных распределений случайных переменных представляет интерес с точки зрения описания существующих взаимосвязей между случайными переменными. В данной работе исследовано совместное распределение односторонних статистик Граббса и описаны его свойства.

2. Совместное распределение односторонних статистик Граббса

Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ - случайная выборка из n значений нормально распределенной случайной величины X. Рассмотрим односторонние статистики Граббса, т.е. стандартизированные максимум и минимум, вычисленные по нормальной выборке:

$$T_n^{(1)} = (\max_{1\le i\le n} X_i - \overline{X})/S \;;\; T_{n,(1)} = (\overline{X} - \min_{1\le i\le n} X_i)/S,$$

где $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n; \quad S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2/(n-1).$

Известно, что частные (маргинальные) распределения статистик $T_n^{(1)}$ и $T_{n,(1)}$ совпадают. Обозначим: $F_n^{(1)}(t) = P(T_n^{(1)} < t)$. Рекурсивные соотношения для вычисления $F_n^{(1)}(t)$ имеют вид [3]

$$F_n^{(1)}(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0, & t \le 1/\sqrt{n}, n \ge 2 \\ n \int_{1/\sqrt{n}}^{t} F_{n-1}^{(1)}(g_n(x)) f_{T_n}(x) dx, & 1/\sqrt{n} < t \le (n-1)/\sqrt{n}, n > 2 \\ 1, & t > (n-1)/\sqrt{n}, n \ge 2 \end{cases}$$

где $g_n(x) = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \cdot \frac{nx}{n-1} \Big/ \left(1 - \frac{nx^2}{(n-1)^2}\right)^{\frac{1}{2}};$

$f_{T_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-2)/2)} \cdot \left(1 - \frac{nx^2}{(n-1)^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}$; $\Gamma(x)$-гамма-функция.

Пусть $\Lambda_n(t_1, t_2) = P(T_{n,(1)} < t_1, T_n^{(1)} < t_2)$ – совместная функция распределения статистик $T_{n,(1)}$ и $T_n^{(1)}$. Рекурсивные соотношения для $\Lambda_n(t_1, t_2)$ имеют вид [4,5]

$$\Lambda_n(t_1,t_2)=\begin{cases}F_n^{(1)}(t_2), & t_1\ge(n-1)/\sqrt{n},\ n>2\\ F_n^{(1)}(t_1), & t_2\ge(n-1)/\sqrt{n},\quad n>2\\ n\int\limits_{1/\sqrt{n}}^{t_2}\Lambda_{n-1}(\rho_n(t_1,-x),g_n(x))\,f_{T_n}(x)dx, & n>2,\quad (t_1,t_2)\in\Delta_n\\ 0, & (t_1,t_2)\notin\Delta_n,\ t_1<(n-1)/\sqrt{n};t_2<(n-1)/\sqrt{n},\quad n>2\end{cases}$$

где $\rho_n(t,z)=\sqrt{(n-2)/(n-1)}\left(+z/(n-1)\right)\left(-nz^2/(n-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\Delta_n=[1/\sqrt{n},(n-1)/\sqrt{n}]^2, n>2;$

$$\Lambda_2(t_1,t_2)=\begin{cases}0, \text{если } (t_1,t_2)\notin\Delta_2;\\ 1, \text{если } (t_1,t_2)\in\Delta_2\end{cases}\quad \Delta_2=[1/\sqrt{2},\infty]^2$$

Опишем свойства совместной функции распределения $\Lambda_n(t_1,t_2)$ [4].

1. $\Lambda_n(t_1,t_2)$ обладает свойством симметричности, а именно: $\Lambda_n(t_1,t_2)=\Lambda_n(t_2,t_1)$.

2. Для $n=3$ имеет место равенство

$$\Lambda_3(t_1,t_2)=\begin{cases}F_3^{(1)}(t_2), & t_1\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}};\ F_3^{(1)}(t_1), \quad t_2\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}};\\ F_3^{(1)}(t_2)-F_3^{(1)}(\theta_3(t_1)),\ (t_1,t_2)\in\tilde{\Delta}_3;\\ 0, & (t_1,t_2)\notin\tilde{\Delta}_3,\ t_1<\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ t_2<\dfrac{2}{\sqrt{3}};\end{cases}$$

где $\tilde{\Delta}_3=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t_1<\dfrac{2}{\sqrt{3}},\theta_3(t_1)<t_2<\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right];\ \theta_3(t_1)=\dfrac{t_1}{2}+\sqrt{1-\dfrac{3}{4}t_1^2}$

$$F_3^{(1)}(t)=\begin{cases}0, & t\le 1/\sqrt{3}\\ \dfrac{3}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\dfrac{1}{2}, & 1/\sqrt{3}<t\le 2/\sqrt{3};\\ 1, & t>2/\sqrt{3}\end{cases}$$

3. $\Lambda_n(t,t)=P\left\{\max\limits_{1\le i\le n}\left|(X_i-\bar{X})/S\right|<t\right\}$

Легко также проверить, что для $n\ge 3$ зависимость между величинами случайными $T_{n,(1)}$ и $T_n^{(1)}$ будет отрицательной.

На Рис. 1–2 приведены результаты численных расчетов значений функции $\Lambda_n(t_1,t_2)$ и плотности $\upsilon_n(t_1,t_2)=\partial^2\Lambda_n(t_1,t_2)/\partial t_1\partial t_2$ для случая, когда параметр распределения $n=15$. Видно, что распределение является симметричным и негауссовым.

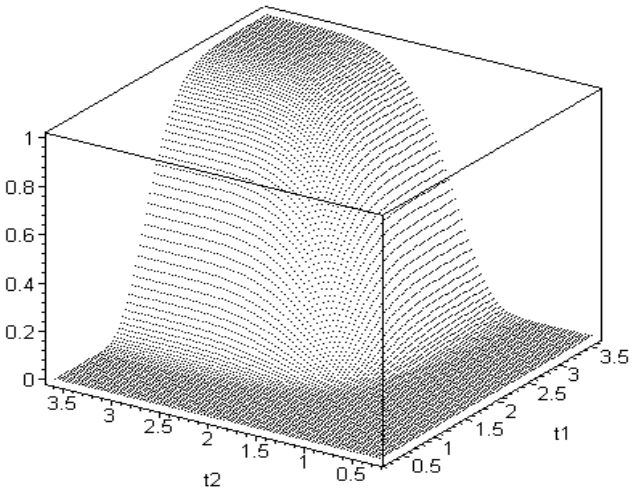


Рис. 1. График совместной функции распределения $\Lambda_{15}(t_1,t_2)$.

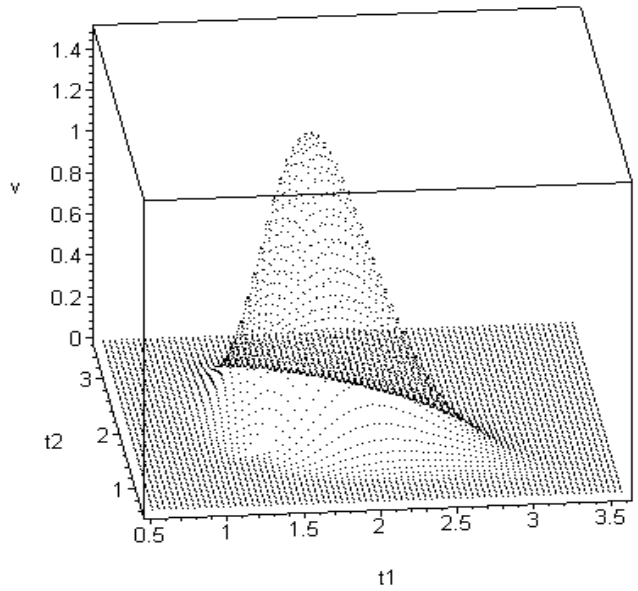


Рис. 2. График совместной плотности распределения $\upsilon_{15}(t_1,t_2)$.

На начальных этапах анализа взаимосвязей между случайными переменными можно применять такой инструмент визуализации взаимосвязей, как хи-плоты [7].

На рис. 3 приведен пример хи-плота, построенного по значениям статистик $T_{n,(1)}$ и $T_n^{(1)}$ в случае, когда параметр распределения $n=15$. Значения статистик $T_{n,(1)}$ и $T_n^{(1)}$ были смоделированы методом Монте-Карло.

Из Рис. 3 видно, что зависимость между величинами случайными $T_{15,(1)}$ и $T_{15}^{(1)}$ является отрицательной. Анализ хи-плотов позволяет также сделать вывод

о наличии асимптотических зависимостей в верхне-левом и нижне-правом хвостах совместного распределения статистик $T_{n,(1)}$ и $T_n^{(1)}$. Применение хи-плотов также выявило, что с ростом n наблюдается ослабление асимптотической зависимости в хвостах распределения.

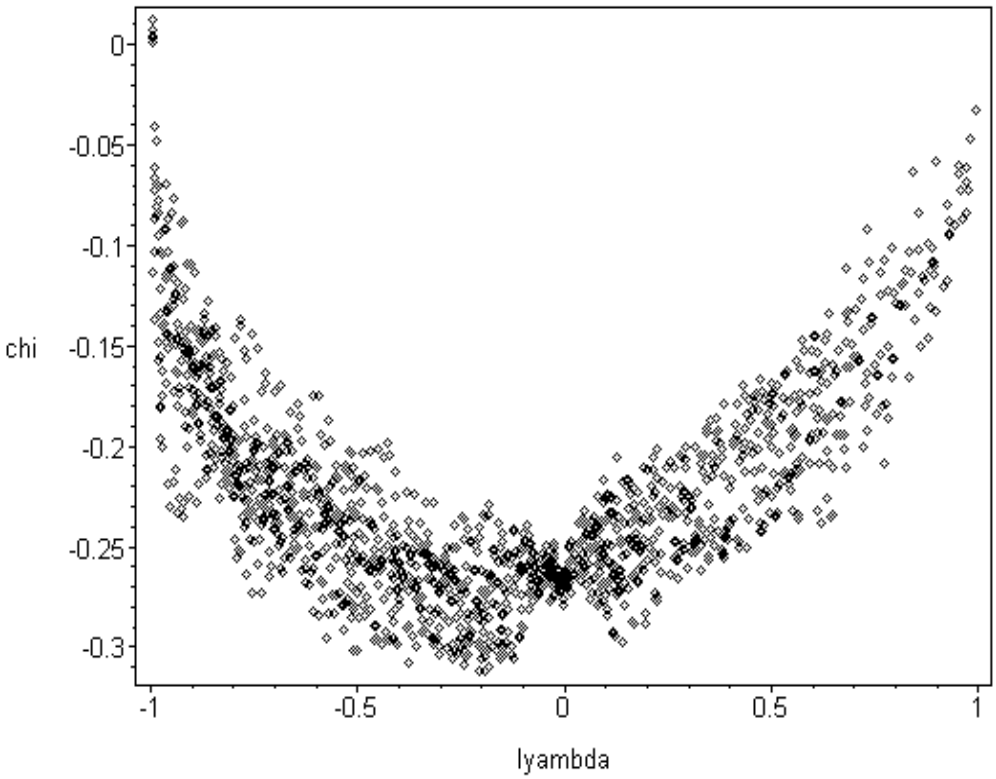


Рис. 3. Пример хи-плота (случай $n=15$)

Литература:

1. Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций, Прикладная эконометрика, 22 (2), 98 – 134 (2011).

2. Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics (Springer-Verlag, New York, 2006).

3. Zhang J., Keming Y. The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample, An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research, 15 (1), 141—150 (2006).

4. Ширяева Л. К. О нулевом и альтернативном распределении статистики критерия наибольшего по абсолютной величине нормированного отклонения, Изв. вузов. Матем., № 10, 62–78 (2014).

5. Shiryaeva L.K. The joint distribution of the standardized maximum and standardized minimum for a normal sample// Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics : Proc. of the Tenth Intern. Conf., Minsk, Sept. 10–14, 2013. Vol 1. – Minsk, 2013. – 177– 180.

6. Shiryaeva L.K. Construction of a copula function from the joint distribution of Grubbs statistics//Advanced Finance and Stochastics: Book of Abstracts. Moskow, June 24-28, 2013.– Moskow, 2013. – Moskow, 102 – 103.

7. Abberger K. A simple graphical method to explore tail-dependence in stock-return pairs // University *of* Konstanz, Germany. URL: http://cofe.uni-konstanz.de/Papers/dp04_03.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. англ
.

References:

1. Fantazzini D. Analysis of multidimensional probability distributions with co-pula functions, Applied Econometrics, 22(2), 98 – 134 (2011).

2. Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics (Sprin-ger-Verlag, New York, 2006).

3. Zhang J., Keming Y. The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample, An Official Journal of the Spanish Society of Sta-tistics and Operations Research, 15 (1), 141—150 (2006).

4. Shiryaeva L. K. On null and alternative distribution of statistics of two-side discordancy test for an extreme outlier, Russ. Math. 58 (10), 52 – 66 (2014).

5. Shiryaeva L.K. The joint distribution of the standardized maximum and stan-dardized minimum for a normal sample// Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics: Proc. of the Tenth Intern. Conf., Minsk, Sept. 10 –14, 2013. Vol 1. – Minsk, 2013. – 177– 180.

6. Shiryaeva L.K. Construction of a copula function from the joint distribution of Grubbs statistics//Advanced Finance and Stochastics: Book of Abstracts. Moskow, June 24-28, 2013. – Moskow, 2013. – Moskow, 102 – 103.

7. Abberger K. A simple graphical method to explore tail-dependence in stock-return pairs // University of Konstanz, Germany. URL: http://cofe.uni-konstanz.de/Papers/dp04_03.pdf