

УДК 629.12 – 531.3

ЗАРОЖДЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ДИАГРАММЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ СУДНА ПРИ ВЕТРЕ

М. И. Фейгин

Исследуется зависимость угла курса установившихся движений судна в прямолинейном направлении и их устойчивость от угла перекладки руля и скорости ветра.

Введение

В отсутствии ветра угол курса судна является нейтральной координатой, а диаграмма управляемости представляет зависимость угловой скорости установившейся циркуляции судна от угла перекладки руля. При ветре роль угла курса в исследовании управляемости судна становится существенной. Диаграмма управляемости судна при ветре определена как зависимость угла курса установившихся движений судна в прямолинейном направлении от угла перекладки руля и скорости ветра.

В работе исследуется зарождение диаграммы при слабом ветре; появление в процессе ее эволюции при усилении ветра бифуркационных значений угла перекладки руля, соответствующих критическим особым точкам диаграммы; их зависимость от скорости ветра; устойчивость установившихся движений судна прямым курсом на различных участках диаграммы управляемости. Это позволило выяснить качественную картину взаимных переходов установившихся режимов движения. Теоретическое рассмотрение сопоставляется с результатами компьютерного моделирования.

Базовая математическая модель

Динамическая модель рассматривается в предположении о неизменности скорости судна. Система координат центра тяжести судна x, y введена таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с направлением истинного ветра V_i ($V_{iy} = 0$, $V_i = V_{ix} > 0$). Соответствующая система дифференциальных уравнений в безразмерной форме записывается в следующем виде [1–3].

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= a\omega + b\beta + s_1 U + g_1 V^2 \sin \gamma (1 - \cos \gamma (1 + n \sin^2 \gamma)), \\ \dot{\beta} &= c\omega + d\beta + h\beta|\beta| + s_2 U + g_2 V^2 \sin \gamma, \\ \dot{\psi} &= \omega,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}V^2 &= V_i^2 - 2V_i \cos(\psi - \beta) + 1, \\ V_i \sin(\psi + \gamma) - \sin(\beta + \gamma) &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos(\psi - \beta), \\ \dot{y} &= \sin(\psi - \beta).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь x, y – координаты центра тяжести судна, ψ – угол курса, ω – угловая скорость, β – угол дрейфа между линейной скоростью центра тяжести и продольной осью симметрии судна, U – параметр управления, равный углу отклонения пера руля.

Координаты центра тяжести судна – x, y в начальный момент будем полагать совпадающим с началом отсчета. Воздействие ветра характеризуют: V и γ – скорость и угол ветра относительно судна. Дифференцирование производится по безразмерному времени, за единицу которого судно проходит расстояние, равное длине корпуса. За единицу скорости ветра принято значение скорости судна. Путь, проходимый судном за единицу безразмерного времени, равен длине корпуса. Заметим, что строго попутному ветру соответствует $\psi = 0, 2\pi$, а встречному $\psi = \pi$.

Переменные x, y входят только в последние два дифференциальных уравнения и при этом еще независимо друг от друга (3). Поэтому качественная картина поведения судна и все возможные бифуркационные ситуации определяются уравнениями (1) относительно переменных ψ, ω, β , а также алгебраическими соотношениями (2), определяющими характеристики ветра V, γ относительно судна от V_i, ψ, β .

Зарождение диаграммы управляемости судном при ветре

При учете воздействия ветра угол курса из нейтральной координаты переходит в разряд одной из существеннейших. Качественная динамическая картина поведения судна определяется уже не в фазовой плоскости координат угловая скорость – угол дрейфа, а в трехмерном цилиндрическом пространстве состояний с обязательным учетом угла курса по отношению к направлению ветра.

Диаграммой управляемости будем называть зависимость угла ψ установившегося движения судна прямым курсом от угла перекладки руля U при определенной скорости истинного ветра. Отметим, что при любом значении V_i существуют стационарные решения уравнений (1)-(3)

$$\begin{aligned} U=0, \quad \omega=0, \quad \beta=0, \quad \psi=0, 2\pi; \\ U=0, \quad \omega=0, \quad \beta=0, \quad \psi=\pi \end{aligned}$$

Следовательно, диаграмма управляемости $\psi(U)$ при $U=0$ всегда проходит через точки $\psi=0, \psi=\pi, \psi=2\pi$.

Стационарные решения системы (1)-(3) при $V_i=0, U=0$ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} b\beta + g_1 \sin \gamma (1 - \cos \gamma (1 + n \sin^2 \gamma)) &= 0, \\ d\beta + h\beta|\beta| + g_2 \sin \gamma &= 0, \\ V^2 &= 1, \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

После преобразования (4) получаем уравнение, решением которого является $\beta=0$.

$$\beta(bg_2 - g_1(d + h|\beta|)(1 - \cos \gamma (1 + n \sin^2 \gamma))) = 0, \tag{5}$$

Искать корни $\beta \neq 0$ не имеет смысла. Из простых физических соображений следует, что при $\beta = -\gamma \neq 0$ моменты от гидродинамических и аэродинамических воздействий оказываются одного знака. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать из первого уравнения (1) члены, соответствующие указанным моментам при $|\gamma| < 0.5$: $M_{гид} = b\beta = -b\gamma$, $M_{аэро} \approx -g_1 V^2 (n - 0.5) \gamma^3$. Их произведение $M_{гид} M_{аэро} > 0$. Это указывает на отсутствие решения уравнения (5), соответствующего стационарному движению прямым курсом при $\beta \neq 0$.

Перейдем к рассмотрению зарождения диаграммы. Будем полагать $V_i \ll 1$, $|\beta| \ll 1$ и $|\gamma| \ll 1$.

Уравнения движения (1), (2) при этом упрощаются

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= a\omega + b\beta + s_1 U, \\ \dot{\beta} &= c\omega + d\beta + s_2 U + g_2 \gamma, \\ \dot{\psi} &= \omega, \\ V_i \sin \psi - \beta - \gamma &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

Отыскание стационарных режимов движения сводится к решению алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}b\beta + s_1 U &= 0, \\ d\beta + s_2 U + g_2 \gamma &= 0, \\ V_i \sin \psi - \beta - \gamma &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

После исключения из (7) β и γ получаем искомое уравнение диаграммы управляемости в виде

$$U = AV_i \sin \psi, \quad A = \frac{bg_2}{(d - g_2)s_1 - bs_2} < 0\tag{8}$$

Для исследования устойчивости решений преобразуем (6), исключив из уравнений переменную $\gamma = V_i \sin \psi - \beta$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= a\omega + b\beta + s_1 U, \\ \dot{\beta} &= c\omega + (d - g_2)\beta + s_2 U + g_2 V_i \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \omega\end{aligned}\tag{9}$$

Характеристическое уравнение системы (9) при $U = \text{const}$

$$\begin{aligned}\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \cos \psi &= 0 \\ a_1 &= -(a + d), \quad a_2 = ad - bc, \quad a_3 = -bg_2 V_i, \quad |a_3| \ll 1\end{aligned}\tag{10}$$

С учетом знаков коэффициентов исходных уравнений для водоизмещающих судов [1] получаем, что коэффициенты $a_1 > 0$, $a_3 < 0$. Знак a_2 указывает на устойчивость ($a_2 > 0$) или неустойчивость ($a_2 < 0$) судна в безветрии. Участки диаграммы управляемости соответствуют устойчивым решениям, если определители Гурвица положительны

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 \cos \psi \approx a_1 a_2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 a_3 \cos \psi > 0.$$

Так как у неустойчивых в безветрии судов $\Delta_2 < 0$, исследуемые движения в случае $V_i \ll 1$ будут неустойчивы при любом угле курса. Характер движения устойчивых в безветрии судов определяется знаком Δ_3 . Поскольку $\Delta_2 a_3 < 0$, устойчивыми будут движения, если $\cos \psi < 0$ ($\pi/2 < \psi < 3\pi/2$) или против ветра. На участках попутного ветра при $0 < \psi < \pi/2$ и $3\pi/2 < \psi < 2\pi$ значение $\cos \psi > 0$ и движения становятся неустойчивыми. Этот результат согласуется с известным из практики судовождения появлением рыскливости при попутном ветре у данного класса судов.

На рис. 1а приведена диаграмма управляемости при $V_i=0$ для неустойчивого в безветрии судна. Если $U = 0$, то существует неустойчивый режим движения прямым курсом при любом угле ψ . В интервале $|U| < U_{kr}$ в зависимости от начальных условий может установиться режим движения левой или правой циркуляции. Если $U > U_{kr}$, устанавливается режим левой циркуляции, если $U < -U_{kr}$, то правой. В случае $V_i \ll 1$ интервал сосуществования циркуляций противоположного знака сужается и в нем зарождаются также неустойчивые стационарные режимы движения прямым курсом под конкретным углом ψ (рис. 1б).

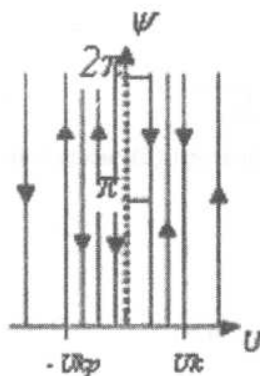


Рис. 1а.

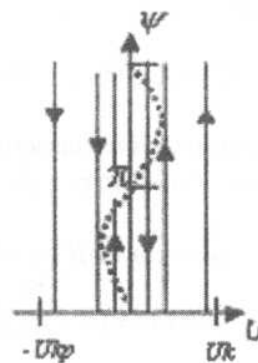


Рис. 1б.

На рис. 2а приведена диаграмма управляемости при $V_i=0$ для устойчивого в безветрии судна. Если $U = 0$, то при любом ψ существует устойчивый режим движения прямым курсом. При $U \neq 0$ существует единственный режим левой или правой цирку-

ляции. В случае $V_i \ll 1$ зарождается интервал угла перекладки руля, при котором существуют два стационарных движения прямым курсом – устойчивый ($\pi/2 < \psi < 3\pi/2$) и неустойчивый (изображен пунктиром). Области устойчивой циркуляции расположены слева и справа от диаграммы управляемости (рис. 2б).

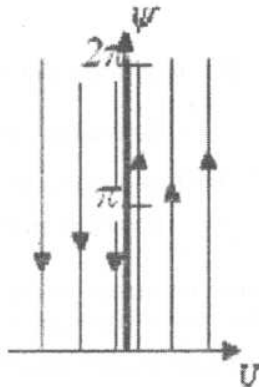


Рис. 2а.

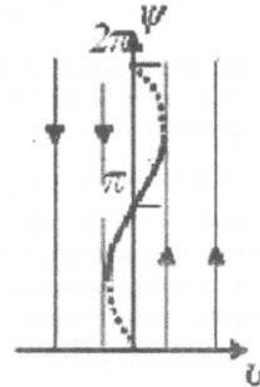


Рис. 2б.

Эволюция диаграммы управляемости судном

Перейдем к получению уравнений диаграммы управляемости сначала для общего случая. Критическими точками (и соответственно критическими значениями угла перекладки руля) будем называть точки диаграммы управляемости, в которых выполняется условие $dU/d\psi = 0$. Уравнения стационарных режимов движения прямым курсом получим из (1),(2), полагая $|\beta| \ll |\psi|$, $|\beta| \ll |\gamma|$,

$$b\beta + s_1 U + g_1 V^2 \sin \gamma (1 - \cos \gamma (1 + n \sin^2 \gamma)) = 0 \quad (11)$$

$$d\beta + s_2 U + g_2 V^2 \sin \gamma = 0$$

$$V^2 = V_i^2 - 2V_i \cos \psi + 1, \quad (12)$$

$$V_i \sin(\psi + \gamma) - \sin \gamma = 0 \quad (13)$$

Исключим β из уравнений (11)

$$wU + V^2 M(\gamma) \sin \gamma = 0 \quad (14)$$

$$M(\gamma) = g_1 d (1 - \cos \gamma (1 + n \sin^2 \gamma)) - g_2 b \quad (15)$$

$$w = s_1 d - s_2 b$$

Дифференцируем уравнение (14) и получаем условие $U'_\psi = 0$

$$\begin{aligned}
 2V_i M(\gamma) \sin \psi \sin \gamma + V^2 (N(\gamma) + M(\gamma) \cos \gamma) \gamma'_\psi &= 0 \\
 N(\gamma) &= g_1 d (1 + n(1 - 3 \cos^2 \gamma)) \sin^2 \gamma \\
 \gamma'_\psi &= \frac{V_i \cos(\psi + \gamma)}{\cos \gamma - V_i \cos(\psi + \gamma)}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Решения уравнений (13) и (16) определяют ψ^* , γ^* , которые позволяют найти критическое значение U^* из уравнения (14).

При зарождении диаграммы управляемости $V_i \ll 1$ и $|\gamma| \ll 1$. В этом случае уравнение (16) принимает вид $-bg_2 V_i (1 - 2V_i \cos \psi) \cos \psi = 0$. Отсюда следует, что критические значения $\psi^* = \pi/2, 3\pi/2$. Они совпадают с соответствующими значениями диаграммы в момент зарождения (8).

Для рассмотрения начальной стадии эволюции диаграммы полагаем, что скорость ветра не превышает скорости судна, или $V_i < 1$. Так как при этом ветер будет встречным, можно считать $|\gamma| < 0.5$. Дополнительное упрощение выражений (13)-(15) позволяет получить зависимости γ , γ'_ψ и $M(\gamma)$ от ψ в явном виде

$$\begin{aligned}
 \gamma &= V_i \sin \psi / (1 - V_i \cos \psi) \\
 V^2 \gamma'_\psi &= V_i (\cos \psi - V_i) \\
 M(\psi) &= -g_2 b - g_1 d (n - 0.5) \left(\frac{V_i \sin \psi}{1 - V_i \cos \psi} \right)^2
 \end{aligned}$$

Тогда условие $U'_\psi = 0$ (16) сводится к одному уравнению относительно угла курса, соответствующего критической точке ψ^*, γ^*

$$\begin{aligned}
 \left(1 + z \left(\frac{V_i \sin \psi^*}{1 - V_i \cos \psi^*} \right)^2 \right) (\cos \psi^* - V_i) + \frac{2V_i \sin^2 \psi^*}{1 - V_i \cos \psi^*} &= 0 \\
 z &= 3g_1 d (n - 0.5) / (g_2 b)
 \end{aligned}$$

Критическое значение угла перекладки руля

$$U^* = -(V_i^2 - 2V_i \cos \psi^* + 1) \gamma^* M(\psi^*) / w$$

Эволюция диаграммы управляемости неустойчивого в безветрии судна для различных значений скорости истинного ветра приведена на рис. 3а-3г, а для устойчивого судна – на рис. 4а-4е. На диаграмме жирными точками выделены критические значения угла перекладки руля, при которых происходит слияние двух стационарных режимов.

Суждение об устойчивости или неустойчивости особых точек различных участков диаграммы можно сделать из общих качественных соображений теории бифуркаций, если кроме особых точек не существуют другие стационарные решения. Для устойчивых в безветрии судов такой подход оказывается применим. Если при изменении па-

раметра V_i происходит слияние двух точек с последующим их исчезновением, то они в общем случае должны соответствовать устойчивому и неустойчивому решениям. В качестве исходного участка, для которого доказана устойчивость, принимаем участок движения против ветра, изображенный сплошной кривой на рис. 2б (соответствующий участок и на рис. 4а). Тогда на остальных диаграммах рис. 4. б–г устойчивыми должны быть участки с таким же наклоном $d\psi/dU > 0$. Компьютерное моделирование полностью подтвердило такой вывод. На рис. 5 в качестве примера приведены проекции траекторий на фазовое кольцо в окрестности шести особых точек для значений параметров $Vi = 0.4$, $U = 0$. Как видно из соответствующей диаграммы (рис. 4в), при $U = 0$ действительно существуют шесть особых точек. Неустойчивые точки обозначены звездочками, а устойчивые – колечками.

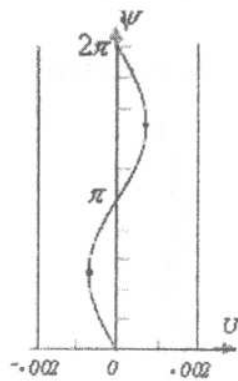


Рис. 3а, $Vi = 0.03$

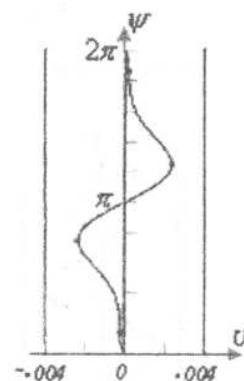


Рис. 3б, $Vi = 0.632$

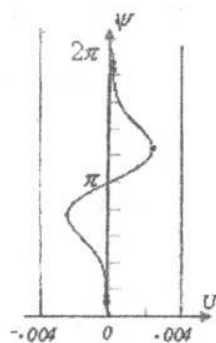


Рис. 3в, $Vi = 0.65$

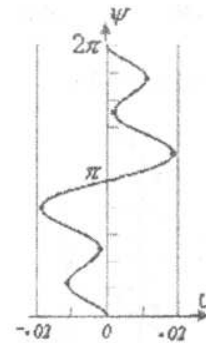


Рис. 3г, $Vi = 0.99$

Для неустойчивого в безветрии судна ситуация существенно сложнее. Это связано с сосуществованием наряду с особыми точками также и замкнутых траекторий – установившихся режимов циркуляций. Наряду с ними возможно существование еще одного типа замкнутых траекторий – предельных циклов ветровых автоколебаний [3].

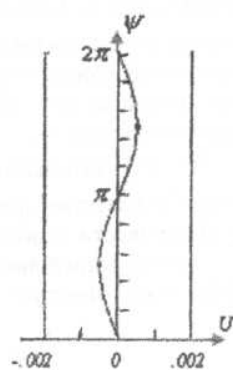


Рис. 4а, $V_i = 0.04$

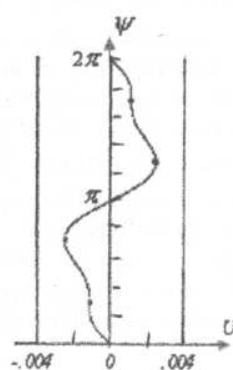


Рис. 4б, $V_i = 0.286$

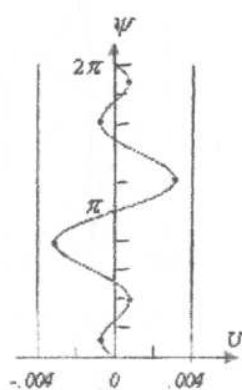


Рис. 4в, $V_i = 0.40$

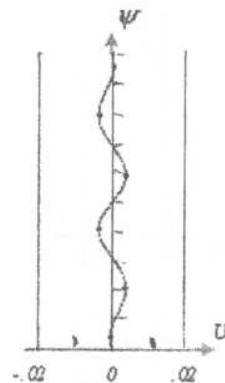


Рис. 4г, $V_i = 0.50$

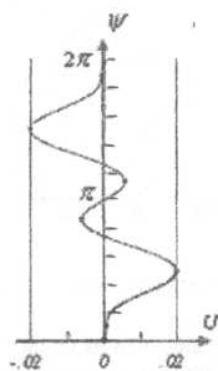


Рис. 4д, $V_i = 0.8808$

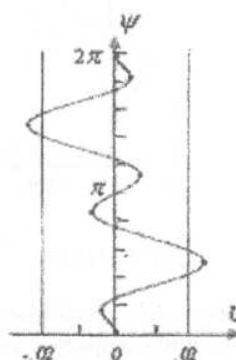


Рис. 4е, $V_i = 0.965$

Поэтому все особые точки могут оказаться неустойчивыми. В качестве примера на рис.6 приведены проекции фазовых траекторий для значений параметров $V_i = 0.99$, $U = 0.005$. В полном соответствии с диаграммой рис. 3г существуют четыре особых точки или четыре установившихся режима движения судна прямым курсом. Все они оказываются неустойчивыми. Из начальных значений, выбираемых в окрестности указанных точек, происходит уход траектории на левую или правую циркуляцию.



Рис. 5.

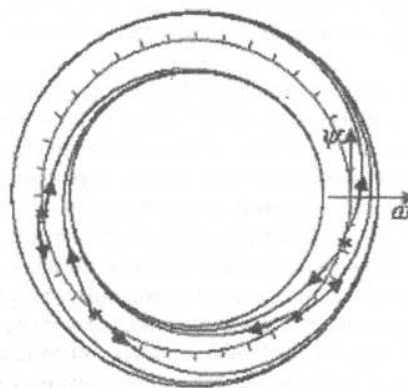


Рис. 6.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 04-01-00815.

Список литературы

1. Войткунский Я.И., Першиц Р.Я., Титов И.А. Справочник по теории корабля. — Л.: Судостроение, 1973. — 512 с.
2. Гофман А.Д. Теория и расчет поворотливости судов внутреннего плавания. — Л.: Судостроение, 1971. — 256 с.
3. Фейгин М.И. Бифуркационный подход к исследованию управляемости судна при ветровом воздействии // Вестн. Нижегород. Ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление. — 1998. — Вып. 2(19). — С. 41–49.

Волжская государственная академия водного транспорта.
603600, Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5. e-mail: fmi@aquasci-nnov.ru

EVOLUTION OF A WIND-GENERATED DIAGRAM OF SHIP CONTROLLABILITY

M. I. Feigin

We study steady motions of a ship on direct heading and a dependence of their stability on a rudder angle and a wind speed.