Страницы истории

ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Л.Г. КУЗНЕЦОВА,
кандидат экономических наук, доцент
Тихоокеанский государственный университет

Финансовые рынки играют важную роль в обеспечении макроэкономического равновесия. Аккумулируя временно свободные денежные ресурсы и затем перераспределяя их между предприятиями и организациями, они направляют потоки денег на финансирование более перспективных и эффективно функционирующих компаний. При этом переливы свободных денег по различным направлениям осуществляются на основе действия известного принципа «невидимой руки рынка», но выбор наиболее привлекательных объектов для инвестирования каждым отдельным владельцем денег производится по-разному. Обычно в процессе такого выбора инвесторы используют разнообразные методы и модели оценки будущей стоимости объектов инвестирования.

Оценка будущей стоимости финансовых активов в теоретических построениях достаточно часто сводится к решению многопараметрических задач, применение которых на практике осложняется неопределенностью выбора переменных, включаемых в процесс анализа при моделировании. Вместе с тем известно, что в реальной действительности инвесторы имеют дело с бесчисленным множеством разнородных по своему происхождению событий. На цены финансовых активов оказывают влияние спекулятивные стратегии профессиональных участников рынка, поступающая информация экономического и политического характера, мотивационные характеристики продавцов и покупателей. Однако учесть все это огромное количество воздействующих на цены обстоятельств в рамках линейных математических моделей невозможно вследствие возникающей неопределенности выбора конечного числа параметров при моделировании. По этой причине при оценивании будущей стоимости финансовых активов можно предложить использовать не функциональные модели описания ценовых колебаний, а методы, в основе которых лежит теория случайных блужданий.

Кратко рассмотрим историю появления и развития этой теории.

Термин «случайное блуждание» возник для описания броуновского движения, названного по имени английского математика Роберта Броуна (1773-1855), впервые описавшего его в 1827 г. Броуновское движение – это беспорядочное, обнаруживаемое под микроскопом движение мельчайших частиц, взвешенных в жидкости. Броун, проводя наблюдения за частицами цветочной пыльцы в стакане воды, сделал вывод о том, что движение каждой цветочной пылинки, на первый взгляд, кажущееся самопроизвольным, является чисто механическим результатом случайных ударов, которые частицы получают со стороны окружающих их молекул жидкости. Позже было выяснено, что такое движение присуще всем без исключения достаточно малым частицам. Было замечено также, что чем меньше частицы, тем более беспорядочными кажутся их движения, так как удары, идущие с разных направлений, меньше уравновешиваются на малой поверхности, чем на большой. Примечательно, что все перемещения и повороты частиц небеспричинны, но наблюдателю кажется, что это движение случайно, хаотично, неопределенно. Отсюда возник термин «случайное блуждание», применяемый в описаниях броуновского движения.

Таким образом, любая перемена в положении броуновской частицы есть результат бесчисленных случайных толчков и ударов со стороны молекул жидкости, а чистое перемещение каждой отдельной частицы есть результат многих малых ее движений в разных направлениях. Можно сказать, что броу-

новское движение целиком обязано бесчисленным случайным влияниям. Точно таким же образом и во всякой совокупности данных о колебаниях цен каждое отдельное изменение цены может быть уподоблено чистому перемещению броуновской частицы, поскольку столкновение многих случайных влияний и факторов обусловливает ценовые скачки. Они различны, эти столкновения, для каждого отдельного случая изменения цен, как и для каждой частицы, взвешенной в жидкости, но их разнообразие и множественность определяют причудливость движений цветочной пыльцы, подмеченной Броуном, и не меньшую затейливость графиков движения цен.

Исследование броуновского движения физиками и математиками имеет длительную и содержательную историю. Назовем здесь только два всемирно известных имени: Альберт Эйнштейн и Норберт Винер. Эйнштейн на основе проведенного им статистического анализа показал, что сумма квадратов перемещений броуновской частицы возрастает пропорционально времени[1]. Образно выражаясь по поводу данного постулата, можно сказать, что в процессе броуновского движения расстояние, на которое передвигается частица, измеряется временем, т. е. в этом процессе пространство и время взаимозамещаются, пространство становится синонимичным времени. По-другому говоря, частица меняет свое положение в дискретные моменты времени, кратные Δt. Отсюда траектория движения броуновской частицы рассматривается как функция времени – $X(t)$.

В статье «Теоретическая атомистика» (1915 г.) Эйнштейн писал о значении броуновского движения для физики, о том, что, в частности, оно позволило совершенно точно вычислить абсолютную величину молекулы, позволило также увидеть под микроскопом тепловую энергию в форме механической энергии хаотически движущихся частиц, стало важным источником для доказательства многих гипотез в молекулярной физике[2].

Изучение движения броуновской частицы с точки зрения математики начинается с исследований Л. Башелье, который в начале XX в. опубликовал две работы[3], затрагивающие проблемы математической интерпретации броуновского процесса. Весьма интересно, что в одной из этих работ французского математика, а именно в Theorie de la speculation, была обоснована гипотеза «случайных блужданий» применительно к ценовым колебаниям на французских товарных рынках. Заметим, что как экономическая теория эта гипотеза не получила широкого признания, оставшись как бы на обочине экономической науки. Что касается броуновского движения, то его Башелье как раз и рассматривал как функцию времени – $X(t)$. Двадцать лет спустя эта же функция строго математически и всесторонне была описана Норбертом Винером. С тех пор процесс броуновского движения математики называют винеровским.

Имя Н. Винера (1895-1964) – американского математика стало широко известно во всем мире после появления в 1948 г. его книги «Кибернетика»[4], сыгравшей основополагающую роль в оформлении кибернетики как самостоятельной дисциплины. Винер много занимался популяризацией идей кибернетики, для этого выступал с лекциями по всему миру, в начале 1960-х гг. приезжал и в СССР. В автобиографической книге «Я – математик» Винер писал об особенностях своего подхода к изучению броуновского процесса, об отличиях этого подхода по сравнению с эйнштейновскими работами: «В фундаментальных работах Эйнштейна и Смолуховского, посвященных броуновскому движению, изучалось или поведение некоторой частицы в фиксированный момент времени, или зависящие от времени статистические характеристики большой совокупности частиц. Математические свойства траекторий отдельных частиц никак не затрагивались»[5].

В этой же работе Винер отмечал, что в чрезвычайно упрощенном виде решение им задачи о вероятностном расчете процессов, содержащих беспорядочные колебания броуновских частиц, можно представить как осреднение, т. е. как некоторый способ интегрирования по всей совокупности сложных кривых, являющихся броуновскими траекториями[6]. Теоретико-вероятностная схема броуновского процесса, согласно Винеру, включает следующие ключевые моменты. Во-первых,

[1] Данное положение означает, что хотя за вдвое большее время частица подвергается вдвое большему воздействию со стороны молекул жидкости, это, однако, не удваивает ее перемещения. Для того чтобы увеличить в два раза дистанцию перемещения, нужно подвергнуть частицу вчетверо более сильному воздействию. См.: *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение. – ОНТИ, 1936.

[2] Подробно см.: *Эйнштейн А.* Физика и реальность. – М.: Наука, 1965. С. 28-32.

[3] Theorie de la speculation. – These, Paris, 29 mart 1900; Theorie mathematique du jue. – Ann. Ec. Norm sup., s.3, t.18, 1901, p. 143-210.

[4] На русском языке: *Винер Н.* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.: Сов.радио, 1958.

[5] *Винер Н.* Я – математик. – М.: Наука, 1967. С.33.

[6] Там же, с. 31.

движение отдельной частицы рассматривается независимо от движения других частиц, или, по-другому, рассматриваются координаты только одной частицы. В теории вероятностей это допущение называется одномерным случайным блужданием. Во-вторых, движение частицы в любой фиксированный момент времени не зависит от ее поведения до этого момента. Отсюда броуновское движение рассматривается как процесс с независимыми приращениями. В-третьих, в функциональной зависимости $X(t)$ для любых t' и $t''>t'$ разность $X(t'') - X(t')$ есть нормально распределенная случайная величина. Отметим, что согласно теории вероятностей нормальное распределение предполагает непрерывность исследуемой случайной величины. В книге «Я – математик» по этому поводу Винер делает уточнение и пишет о том, что при рассмотрении броуновского движения он исходил из предположения о непрерывности происходящих столкновений, хотя в реальности существуют обязательные временные промежутки, в течение которых никаких столкновений не происходит. Эти промежутки, однако, слишком малы, поэтому все траектории броуновского движения анализировались им как непрерывные[7].

В своей автобиографии о траекториях броуновских частиц Винер писал следующее: «... Непрерывные кривые, являющиеся столь извилистыми, что ни в какой их точке нельзя сказать, какое же они имеют направление ... ранее такие кривые были в науке на положении пасынков; они рассматривались как совершенно неестественные патологические объекты, выдуманные математиками и не имеющие никакого отношения к реальному физическому миру. Мне удалось построить физическую по существу теорию, в которой такие кривые играли основную роль»[8].

Дополняя самооценку Винером построенной им теории, можно сказать, что винеровская модель, позволяющая сделать вероятностный расчет положения броуновской частицы в момент времени t, в реальном мире показала не только свою полную приемлемость и необходимость, но и впечатляющую точность стохастических прогнозов. Об этом свидетельствует широкое применение теории случайных процессов в радиоэлектронике, теории информации, математической биологии, генетике, молекулярной теории газов. Теория случайных процессов сравнительно недавно выделилась из теории вероятностей и математической статистики в специальную дисциплину, и в ней классическое броуновское движение рассматривается лишь как один специальный класс среди множества других случайных процессов.

В реальном мире ценовых колебаний о приемлемости и нужности концепции случайных блужданий свидетельствует модель Блэка – Шоулза по оценке опционов, построенная на основе винеровского процесса. Модель была разработана Фишером Блэком и Майроном Шоулзом и представлена ими в небольшой, на 17 страницах, статье под названием «Ценообразование опционов и обязательства корпораций» в «Журнале политической экономии» в 1973 г.[9] В 1997 г. за разработку модели ее авторы получили Нобелевскую премию по экономике. В настоящее время тысячи инвесторов каждый день используют ее при построении своих инвестиционных стратегий. Можно также утверждать, что современным экономистам-исследователям модель дает схему рассмотрения процессов ценообразования на финансовых рынках с вероятностных позиций теории случайных блужданий.

Итак, броуновская частица меняет свое положение в дискретные моменты времени, кратные Δt. Изменение положения частицы происходит таким образом, что, находясь в точке x, частица переходит с равными вероятностями в одну из соседних точек: $x+\Delta x$ или $x-\Delta x$. В рамках общей теоретико-вероятностной схемы известно, что распределение вероятностей случайной величины, имеющей два равновероятных исхода, называется биномиальным, или распределением Бернулли. Ценовые изменения на финансовом рынке, обусловленные множеством разнонаправленных факторов, также являются случайным событием, имеющим два равновероятностных исхода – увеличение или уменьшение цены. По этой причине биномиальное распределение может быть использовано при оценивании стоимости финансовых активов. Для этого в процессе ценовых колебаний необходимо выделить ряд моментов, имеющих значение для анализа.

Цена актива меняется дискретно. Время наблюдения за изменениями цены равно t. За время t цена меняется n раз. Изменение цены равно Δx. Увеличение цены обозначается как $x+\Delta x$, уменьшение – $x-\Delta x$. Для определения совокупного ценового изменения за время t воспользуемся формулой из учебника по теории вероятностей, которая

[7] Там же, с.33-34.

[8] *Винер Н.*, цит. соч., с. 88.

[9] *Black F. Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // journal of Political Economy, 1973, p. 637-654.

применялась авторами для описания броуновского движения[10]:

$$X(t) = [X_n\Delta x - (n - X_n)\Delta x] = (X_n\Delta x - n\Delta x + X_n\Delta x) = (2X_n - n)\Delta x.$$

Поясним принятые в формуле обозначения. X_n - число изменений в сторону увеличения цены. $X_n\Delta x$ - общее увеличение цены; $(x - X_n)\Delta x$ – общее уменьшение цены. $X(t)$ – общее изменение цены за время t.

Проанализируем курсовые колебания евро по отношению к российскому рублю в течение января 2005 г. на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ)[11]. С учетом числа торговых дней в январе 2005 г. параметр t у нас будет равен 15. ММВБ публикует курсы торгуемых на бирже валют как средневзвешенные по каждому рабочему дню. При таком условии мы можем допустить, что Δt равно 1 дню, что означает изменение цены один раз в течение торгового дня. В соответствии с этим число n – число ценовых изменений, равное 15.

Параметр Δx – ценовой сдвиг за одно изменение курса евро мы можем найти с помощью показателя среднего квадратического отклонения, который в финансовой математике всегда применяется для определения колеблемости цен. Формула среднего квадратического отклонения имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(xi - \bar{x})^2}{n}}.$$

Таблица 1

Данные для расчета изменчивости курса евро к российскому рублю на ММВБ за январь 2005 г.

Дата	Число ценовых изменений (n)	Курс, руб./евро	Отклонение цены от средней ($x_i - \bar{x}$)	$(x_i - \bar{x})2$
11.01.05	1	36,7517	0,097	0,0094
12.01.05	2	36,6115	-0,043	0,0018
13.01.05	3	36,9866	0,332	0,1102
14.01.05	4	36,7081	0,054	0,0029
17.01.05	5	36,7108	0,056	0,0032
18.01.05	6	36,6288	-0,026	0,0007
19.01.05	7	36,7254	0,071	0,0050
20.01.05	8	36,5925	-0,062	0,0038
21.01.05	9	36,5402	-0,114	0,0131
24.01.05	10	36,6220	-0,033	0,0011
25.01.05	11	36,5137	-0,141	0,0198
26.01.05	12	36,4866	-0,168	0,0282
27.01.05	13	36,6963	0,042	0,0017
28.01.05	14	36,6176	-0,037	0,0014
31.01.05	15	36,6260	-0,029	0,0008
		Σ 549,8178 $\bar{x}$ = 36,6545		Σ 0,2031 σ = 0,12

Таблица 2

Расчет возможных вариантов изменения курса евро при n=15; $Ц_0$=36,6260; Δx=0,044

Возможные варианты по изменению цены (X_n)	$X(t) = (2X_n - n)\Delta x$	Возможные изменения цены
0	(2·0 – 15) 0,044 = -0,66	35,966
1	(2·1 – 15) 0,044 = -0,572	36,054
2	(2·2 – 15) 0,044 = -0,484	36,142
3	(2·3 – 15) 0,044 = -0,396	36,230
4	(2·4 – 15) 0,044 = -0,308	36,318
5	(2·5 – 15) 0,044 = -0,220	36,406
6	(2·6 – 15) 0,044 = -0,132	36,494
7	(2·7 – 15) 0,044 = -0,044	36,582
8	(2·8 - 15) 0,044 = 0,044	36,670
9	(2·9 - 15) 0,044 = 0,132	36,758
10	(2·10 - 15) 0,044 = 0,220	36,846
11	(2·11 - 15) 0,044 = 0,308	36,934
12	(2·12 - 15) 0,044 = 0,396	37,022
13	(2·13 - 15) 0,044 = 0,484	37,110
14	(2·14 - 15) 0,044 = 0,572	37,198
15	(2·15 - 15) 0,044 = 0,660	37,286

Для расчета Δx по формуле заполним табл. 1.

Произведенные расчеты свидетельствуют, что среднедневная изменчивость курса евро в анализируемый период составляла 0,12%. Если для прогнозных исчислений мы возьмем курс евро за последний день января ($Ц_0$) - 36,6260 руб., то в этом случае ценовый сдвиг (Δx) у нас будет равен 0,12% от числа 36,6260, т. е. 0,044 руб.

В теории вероятностей известно, что при n = 15 число возможных исходов случайного события будет равно n+1. Это означает, что при 15 изменениях цены число вариантов ценового изменения составит 16. Используя формулу совокупного ценового изменения $X(t)$, рассчитаем все возможные варианты. Прежде всего предположим, что в течение всех последующих 15 дней цена не увеличится ни разу. Это будет означать, что X_n равно 0. Подставляем 0 в формулу и делаем расчет:

$$X(t) = (2X_n - n)\,\Delta x = (2\cdot 0 - 15)\,0{,}044 = -0{,}66.$$

Число «-0,66» является первым возможным вариантом изменения курса евро в прогнозируемом периоде. При таком развитии событий курс евро может принять значение, равное: 36,6260 - 0,66 = 35,9660 руб. Остальные потенциальные варианты курсовых колебаний по евро на ММВБ при обозначенных условиях представим в табл. 2.

[10] *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1987. С.53-55.

[11] Информация для расчета: www.cbr.ru.

Данные табл. 2 показывают, что в прогнозируемый период при оговоренном изменении курса 1 раз в течение торгового дня и курсовой изменчивости, равной 0,12%, величина изменений курса евро на ММВБ будет колебаться в диапазоне от -0,66 до +0,66 руб./евро, а сам курс при $Ц_0$=36,6260 руб./евро руб. может изменяться в интервале от 35,966 до 37,286 руб./евро. Другими словами, размах курсового колебания при обозначенных условиях будет составлять 3,6% от первоначальной цены.

Определим вероятности каждого из возможных вариантов изменения курса с помощью формулы Бернулли[12] и представим полученное распределение вероятностей в форме табл. 3, в которой будут обозначены все возможные варианты прогнозируемого курса евро и вероятности этих изменений.

На основе полученного распределения вероятностей можно сделать вывод о том, что крайние варианты курсовых колебаний, при которых возможные значения курсов будут равны 35,966 и 37,286 руб./евро, имеют ничтожно малую вероятность, составляющую 0,00003. Можно сказать, что вероятность варианта, при котором курс не увеличится ни разу (X_n=0), составляет 0,003%. Аналогичный исход имеет противоположный случай, при котором курс будет увеличиваться 15 раз при 16 возможных вариантах развития событий (X_n=15).

Таблица 3

Распределение вероятностей по всем возможным вариантам изменения курса евро

Потенциальные варианты изменения курса евро	Вероятность варианта
35,966	0,00003
36,054	0,0005
36,142	0,0032
36,230	0,0139
36,318	0,0417
36,406	0,0916
36,494	0,1527
36,582	0,1964
36,670	0,1964
36,758	0,1527
36,846	0,0916
36,934	0,0417
37,022	0,0139
37,110	0,0032
37,198	0,0005
37,286	0,00003

Таблица распределения вероятностей свидетельствует также, что наибольшую вероятность, равную 19,64%, имеют два варианта курсовых изменений. При одном из них курс евро сможет увеличиться 7 раз (X_n=7), и в этом случае в прогнозный период он примет значение, равное 36,582 руб./евро. При другом наиболее вероятном исходе курс увеличится 8 раз (X_n=8) и примет значение 36,670 руб./евро.

Все исчисленные варианты изменений курса евро к российскому рублю графически можно представить на рисунке.

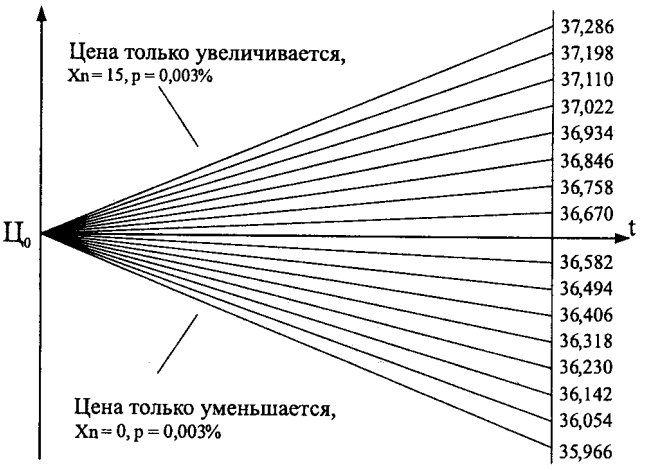


Рис. Веер возможностей по изменению курса евро при n=15, $Ц_0$=36,6260.

В заключение отметим, что вероятностные методы оценки финансовых активов, в основе которых лежит концепция случайных блужданий, дают возможность экономистам в теоретических построениях опираться не только на выявление различных функциональных взаимосвязей, но и применять аргументацию, подтвержденную количественными параметрами, характеризующими непредсказуемые процессы ценовых изменений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1987.
2. www.cbr.ru
3. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. – СПб.: Лань, 2004.

[12] Алгоритм расчета вероятностей по формуле Бернулли можно найти: *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. – СПб.: Лань, 2004. С. 72.