

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СОВМЕСТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$$

Н. В. Бударина (г. Хабаровск)

Аннотация

В данной работе показано, что если ряд $\sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r)$ сходится, где Ψ – монотонно убывающая функция, то мера множества точек

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m,$$

удовлетворяющих одновременно неравенствам

$$\max_{1 \leq i \leq k} |P(x_i)| \leq H(P)^{-v_1/k} \Psi^{\lambda_1/k}(H(P)),$$

$$\max_{1 \leq j \leq l} |P(z_j)| \leq H(P)^{-v_2/l} \Psi^{\lambda_2/l}(H(P)) \text{ и}$$

$$\max_{1 \leq t \leq m} |P(w_t)|_p \leq H(P)^{-v_3/m} \Psi^{\lambda_3/m}(H(P)),$$

где $v_1 + 2v_2 + v_3 = n - k - 2l$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1$, для бесконечного числа целочисленных многочленов P степени $\leq n$, равна нулю.

1 Введение

В теории диофантовых приближений необычайно эффективным является принцип Дирихле. Его использование доказывает разрешимость многих неравенств в целых числах. Та легкость и простота, с которой доказывается разрешимость, наводит на мысль, что использование более глубоких и современных методов позволит значительно улучшить теоремы, доказанные с помощью принципа Дирихле. Метрическая теория диофантовых приближений показывает, что, для большинства значений параметров в неравенствах, результаты оказываются практически неулучшаемыми.

Пусть

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0$$

– целочисленный многочлен с $a_n \neq 0$, степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество целочисленных многочленов степени не превосходящей n .

В работе исследуются диофантовы приближения многочленов в полях действительных, комплексных и p -адических чисел одновременно. Другими словами, изучается множество точек $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$, для которых одновременно малы значения $|P(x_i)|$, $|P(z_j)|$ и $|P(w_t)|_p$. Аналогичные задачи рассматривались отдельно в каждом из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$, и об этих результатах будет сказано позднее.

Прежде чем приступить к формулировке результатов, введем некоторые обозначения. Пусть $\mu_1(A_1)$ – мера Лебега измеримого множества $A_1 \subset \mathbb{R}$; пусть $\mu_2(A_2)$ – мера Лебега измеримого множества $A_2 \subset \mathbb{C}$; пусть $\mu_3(A_3)$ обозначает меру Хаара измеримого множества $A_3 \subset \mathbb{Q}_p$. Используя эти определения, определим произведение мер μ на $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$, полагая

$$\mu(A) = \prod_{i=1}^k \mu_1(A_{1,i}) \prod_{j=1}^l \mu_2(A_{2,j}) \prod_{t=1}^m \mu_3(A_{3,t})$$

для множества $A = \prod_{i=1}^k A_{1,i} \times \prod_{j=1}^l A_{2,j} \times \prod_{t=1}^m A_{3,t}$, где $A_{1,i} \in \mathbb{R}$, $A_{2,j} \in \mathbb{C}$ и $A_{3,t} \in \mathbb{Q}_p$.

Для заданной функции аппроксимации $\Psi_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ определим $L_n(\Psi_0)$ как множество точек $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < \Psi_0(H(P))$$

выполнено для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$. Используя принцип ящиков Дирихле или теорему Минковского о линейных формах, нетрудно показать, что для $\Psi_0(H) = H^{-v}$ и $v \leq n$ множество $L_n(\Psi_0)$ имеет полную меру Лебега. В [16] было доказано, что $\mu_1(L_n(\Psi_0)) = 0$ для $\Psi_0(H) = H^{-v}$ и $v > 4n$, и этот результат Спринджук улучшил [17], решив проблему Малера, показав, что

$$\mu_1(L_n(\Psi_0)) = 0 \tag{1}$$

для $v > n$.

В 1966 Бейкер [1] усилил теорему Спринджука, доказав, что меру нуль имеет множество действительных чисел $L_n(\Psi_0)$ для $\Psi_0(H) = \Psi^n(H)$, где $\Psi(H)$ – монотонно убывающая последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty. \tag{2}$$

Это очевидно, что для $\Psi(H) = H^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, результат Спринджука следует из теоремы Бейкера. В тоже время, существуют функции Ψ , например,

$\Psi(H) = H^{-1} \log^{-1-\epsilon} H$, $\epsilon > 0$, удовлетворяющие условию (2), и которые убывают медленнее, чем $H^{-n-\epsilon}$.

В той же работе Бейкер предположил, что выполняется более сильный результат, если рассматривать функции вида $\Psi_0(H) = H^{-n+1}\Psi(H)$ в (1), позже известный как гипотеза Бейкера [1]. Если положить $\Psi(H) = H^{-1} \log^{-1-\epsilon} H$, $\epsilon > 0$, то разница в правых частях в теореме Бейкера и в гипотезе Бейкера становится очевидной. Полное решение проблемы Бейкера было дано Берником [8] (случай сходимости) и Бересневичем [2] (случай расходимости), приведенное ниже.

ТЕОРЕМА 1 (Берник [8], Бересневич [2]). *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого интервала $I \subset \mathbb{R}$*

$$\mu_1(L_n(\Psi_0) \cap I) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty \text{ и } \Psi(H) - \text{монотонная}, \\ \mu_1(I), & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty \text{ и } \Psi(H) - \text{монотонная}. \end{cases} \quad (3)$$

Следует отметить, что случай $n = 1$ был впервые описан Хинчиным в 1924 (см. [14]), который сформулируем в несколько более сильной современной формулировке (см. [6]).

ТЕОРЕМА 2 (Хинчин [14]).

$$\mu_1(L_1(\Psi) \cap I) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1(I), & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty \text{ и } \Psi(H) - \text{монотонная}. \end{cases}$$

Принимая во внимание монотонность функции Ψ , теоремы типа Хинчина для многочленов были впоследствии доказаны для случая комплексной [9] и p -адической переменных [5, 15]. Кроме того, в случае монических многочленов теоремы типа Хинчина были получены в [12] и [13]. В более общем случае диофантовых приближений на невырожденных многообразиях теоремы типа Хинчина были доказаны в [3, 4, 10].

В данной работе доказывается аналог результата (3) в случае сходимости. Пусть k, l, m – натуральные числа и рассмотрим пространство $S = \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$. Зафиксируем параллелепипед $\mathbf{T} = I^k \times K^l \times D^m$, где I – интервал в $\mathbb{R}$, K – диск в $\mathbb{C}$ и D – цилиндр в $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, где $\lambda_i > 0$ и $v_i \geq 0$, такие что $v_1 + 2v_2 + v_3 = n - k - 2l$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Далее, пусть $L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ обозначает множество точек $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbf{T}$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_l)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, для которых система неравенств

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq k} |P(x_i)| &\leq H(P)^{-v_1/k} \Psi^{\lambda_1/k}(H(P)), \\ \max_{1 \leq j \leq l} |P(z_j)| &\leq H(P)^{-v_2/l} \Psi^{\lambda_2/l}(H(P)), \\ \max_{1 \leq t \leq m} |P(w_t)|_p &\leq H(P)^{-v_3/m} \Psi^{\lambda_3/m}(H(P)), \end{aligned} \quad (4)$$

выполняется для бесконечно числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq k + 2l$. Если Ψ – положительная монотонно убывающая функция вещественного переменного, такая, что $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, тогда

$$\mu(L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0.$$

Рассмотренная в данной статье задача принципиально отличается от предшествующих метрических задач, решенных Спринджук, Берником, Бересневичем, Маргулисом, Клейнбоком и Ковалевской. В задачах, ими решенных, показатели степени в аппроксимации были близки к степени рассматриваемых многочленов. Это приводило к тому, что даже в несколько расширенных интервалах/кругах/цилиндрах могли оказаться один или два корня, поэтому оценку мер достаточно было проводить по первой и второй производной. В данной задаче из-за произвольности k , l и m происходит разделение показателей аппроксимации на малые значения, и тогда в расширенных областях может оказаться много корней. В таком случае для оценки мер надо привлекать производные высоких порядков, поскольку оценки по первой и второй производной могут оказаться хуже тривиальных. В настоящей работе вводится новое понятие линейных и нелинейных систем диофантовых неравенств по типу аппроксимации нуля значениями производных в окрестности корней многочленов. Благодаря этому, появилась возможность создать метрическую теорию диофантовых совместных приближений в различных метриках. Также в статье используется модификация метода существенных и несущественных областей, который широко используется для доказательства теорем хинчинского типа в случае сходимости.

Содержание исследований разбито на три раздела (разделы 2–4). Разделы 2 и 3 посвящены доказательству теоремы для случая $k = l = m = 1$. Раздел 2 содержит некоторые предварительные результаты и вспомогательные леммы, а в разделе 3 доказывается соответствующая метрическая теорема. В разделе 4 приводится схема рассуждения для общего случая.

2 Предварительные результаты

В силу того, что функция Ψ^λ монотонна и ряд $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$ сходится, нетрудно показать, что $\Psi(H) < cH^{-1}$, где константа c не зависит от H . Следовательно, в некоторых случаях для простоты вычислений вместо системы (4) будет рассмотрена более слабая система

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll H(P)^{-v_1-\lambda_1}, \\ |P(z)| &\ll H(P)^{-v_2-\lambda_2}, \\ |P(w)|_p &\ll H(P)^{-v_3-\lambda_3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь и далее $A \ll B$ означает, что существует константа $C > 0$ такая, что $A \leq CB$; выражение $A \asymp B$ эквивалентно $A \ll B \ll A$.

В общем случае, положительные константы, зависящие только от n , будем обозначать через $c(n)$; обычные формальные правила применимы так, что $c(n)+c(n)=c(n)$ и $c(n)c(n)=c(n)$. Если необходимо, то константы будем нумеровать $c_j(n)$, $j = 1, 2, \dots$.

2.1 Сведение к неприводимым ведущим многочленам

В этом подразделе сначала будет показано, что достаточно рассмотреть лишь неприводимые многочлены $P \in \mathbb{Z}[x]$. Это следует непосредственно из нижеприведенной леммы, доказанной в [18].

ЛЕММА 1. Пусть $G(v)$ – множество точек (x, z, w) , для которых неравенство

$$|P(x)||P(z)|^2|P(w)|_p < H^{-v}, \quad n = \deg P \geq 2, \quad H = H(P),$$

имеет бесконечно много решений в многочленах $P \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для $v > n - 2$

$$\mu(G(v)) = 0.$$

Пусть $P = P_1 P_2$ – приводимый многочлен, удовлетворяющий (4). Пусть $\deg P_1 = d \leq n - 1$. Тогда, без ограничения общности, можем считать, что

$$|P_1(x)||P_1(z)|^2|P_1(w)|_p \ll H(P_1)^{-n+3}\Psi(H(P_1)) \ll H(P_1)^{-d+1}.$$

В силу леммы 1, мера множества (x, z, w) , для которых неравенство (4) имеет бесконечное число решений в приводимых многочленах P , равна нулю.

Далее будем полагать, что P – неприводимый примитивный многочлен, поскольку при переходе от непримитивного к примитивному многочлену получим более сильное в совокупности условие.

Многочлен P называется *ведущим*, если он удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} H(P) &< c(n)|a_n|, \quad c(n) \geq 1, \\ |a_n|_p &> c(n). \end{aligned} \tag{6}$$

В следующей лемме будет показано, что используя сдвиги и находя обратные величины (если необходимо), каждый многочлен P может быть преобразован в многочлен T , удовлетворяющий (6). Поскольку существует конечное число возможных сдвигов, то каждая точка x , удовлетворяющая условию (4) бесконечно часто, также удовлетворяет этому условию для бесконечного числа ведущих многочленов для каждого сдвига. Подобное сведение к специального вида многочленам были сделаны в [17] отдельно в каждой из рассматриваемых метрик. Поскольку такое сведение одновременно в нескольких метриках немного сложнее, то приведем его ниже.

ЛЕММА 2. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ – множество различных простых чисел и $P \in \mathbb{Z}[x]$ – примитивный неприводимый многочлен. Пусть $Q(x) = P(x + m)$ и $T(x) = x^n Q(\frac{1}{x})$. Тогда существует натуральное число $m \leq C(n, p_1, \dots, p_k)$ такое, что многочлен $T(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$ удовлетворяет следующим условиям

$$|b_n| \gg H(T), \quad |b_n|_{p_i} \gg 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого d выполняется система неравенств

$$\max_{1 \leq k \leq n+1} |P(k)|_{p_1} < p_1^{-d}. \quad (7)$$

Следовательно, для каждого $i = 1, \dots, n+1$

$$i^n a_n + i^{n-1} a_{n-1} + \dots + i a_1 + a_0 = p_1^d |\theta_i|_{p_1}, \quad (8)$$

где $\theta_i = p_1^{d_i} \theta'_i$, $d_i \geq 1$, $\theta_i \in \mathbb{N}$ и $(p_1, \theta'_i) = 1$. Поскольку P – примитивный многочлен, то существует j_0 , $0 \leq j_0 \leq n$, такое, что $|a_{j_0}|_{p_1} = 1$. Решим систему (8) относительно a_{j_0} , и найдем

$$a_{j_0} = \frac{\Delta_{j_0}}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы (b_{ij}) размера $(n+1) \times (n+1)$ и $b_{ij} = i^{j-1}$, $1 \leq i, j \leq n+1$. Нетрудно проверить, что $\Delta = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)!$.

Если p_1^r делит $k!$, то

$$r \leq \left\lfloor \frac{k}{p_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p_1^2} \right\rfloor + \dots \leq k \sum_{j=1}^{\infty} p_1^{-j} \leq k.$$

Следовательно, Δ содержит степень p_1 не большую, чем n^n . Нетрудно показать, что p_1^d делит Δ_{j_0} , и, следовательно, $p_1^{d-n^n}$ делит a_{j_0} . Если $d > n^n$, то получаем противоречие с фактом, что $|a_{j_0}|_{p_1} = 1$, и, следовательно, равенство (7) противоречиво. Поэтому, существует $m_0 \in \{1, \dots, n+1\}$ такое, что $|P(m_0)|_{p_1} \gg 1$.

Определим целое число l_1 так, что $|P(m_0)|_{p_1} = p_1^{-l_1}$ и выберем $l'_1 > l_1$. Далее рассмотрим числа вида $r_1(m_1) = m_1 p_1^{l'_1} + m_0$, $1 \leq m_1 \leq n+1$. Ясно, что $|P(r_1(m_1))|_{p_1} = |P(m_0)|_{p_1} \gg 1$. Приведенный выше алгоритм для неравенства (7), применим к числам $r_1(m_1)$, $1 \leq m_1 \leq n+1$. Предположим, что существует такое число d , что $|P(r_1(m_1))|_{p_2} < p_2^{-d}$. Пусть Δ' – определитель матрицы (b_{ij}) , где $b_{ij} = (i p_1^{l'_1} + m_0)^{j-1}$, $1 \leq i, j \leq n+1$, тогда

$$\Delta' = (p_1^{l'_1})^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)!.$$

Следовательно, получаем существование такого числа $m'_1 \in \{1, \dots, n+1\}$, что $|P(r_1(m'_1))|_{p_2} \gg 1$; то есть существует l_2 , удовлетворяющее равенству

$$|P(r_1(m'_1))|_{p_2} = p_2^{-l_2}.$$

Опять воспользуемся вышеприведенным алгоритмом; для $l'_2 > l_2$ рассмотрим числа $r_2(m_2) = m_2 p_1^{l'_1} p_2^{l'_2} + m'_1 p_1^{l'_1} + m_0$, $1 \leq m_2 \leq n+1$. По построению получаем, что $|P(r_2(m_2))|_{p_1} \gg 1$ и $|P(r_2(m_2))|_{p_2} \gg 1$. Следуя алгоритму также получаем, что $|P(r_2(m_2))|_{p_3} \gg 1$. Продолжим применять этот алгоритм, и в итоге получим существование такого числа m'_{k-1} , $1 \leq m'_{k-1} \leq n+1$, что $|P(r_{k-1}(m'_{k-1}))|_{p_i} \gg 1$ для $i = 1, \dots, k$.

Аналогично для архимедовой метрики рассмотрим числа

$$r_k(m_k) = m_k p_1^{l'_1} \dots p_k^{l'_k} + \dots + m'_2 p_1^{l'_1} p_2^{l'_2} + m'_1 p_1^{l'_1} + m_0$$

для $m_k = 1, \dots, n+1$. Покажем, что среди $n+1$ чисел найдется число m'_k такое, что $|P(r_k(m'_k))| \gg H$. Предположим, что система неравенств

$$\max_{1 \leq m_k \leq n+1} |P(r_k(m_k))| \leq c_0 H. \quad (9)$$

выполняется для некоторой константы $c_0 > 0$ (будет выбрана позднее). Поскольку $P \in \mathcal{P}_n(H)$, то существует i_0 , $0 \leq i_0 \leq n$, такое, что $|a_{i_0}| = H$. Решим систему (8) относительно a_{i_0} , и получим, что $P(r_k(m_k)) = \xi_j c_1 H$, где $|\xi_j| \leq 1$, $1 \leq j \leq n+1$, и

$$a_{i_0} = \frac{\Delta''_{i_0}}{\Delta''}.$$

Здесь Δ'' – определитель матрицы (b_{ij}) , где

$$b_{ij} = (i p_1^{l'_1} \dots p_k^{l'_k} + \dots + m'_2 p_1^{l'_1} p_2^{l'_2} + m'_1 p_1^{l'_1} + m_0)^{j-1}, 1 \leq i, j \leq n+1,$$

таким образом,

$$\Delta'' = (p_1^{l'_1} \dots p_k^{l'_k})^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)!.$$

Справедливо равенство $\Delta''_{i_0} = c_0 c'_0 H$ для некоторой константы $c'_0 > 0$. Выберем c_0 так, что $c_0 c'_0 < 1$. Так как $|a_{i_0}| = H$, то неравенство (9) противоречиво. Следовательно, существует m'_k такое, что $|P(r_k(m'_k))| \gg H$.

Определим многочлены $Q(x) = P(x + r_k(m'_k)) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, где $b_0 = P(r_k(m'_k))$, и $T(x) = x^n Q(\frac{1}{x}) = g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \dots + g_1 x + g_0$, где $g_n = P(r_k(m'_k))$. Тогда для высот многочленов справедлива следующая оценка $H(T) \asymp H(Q) \asymp H(P)$, и многочлен T удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

2.2 Вспомогательные леммы и результаты

Обозначим через $\mathcal{P}_n(H)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, для которых $H(P) = H$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ в $\mathbb{C}$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – корни в $\mathbb{Q}_p^*$, где $\mathbb{Q}_p^*$ – наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}_p$ и все алгебраические числа. Поскольку множество алгебраических чисел счетно, то в поле $\mathbb{Q}_p^*$ можно

определить нормирование, продолжающее нормирование в $\mathbb{Q}_p$. Норму $r \in \mathbb{Q}_p^*$ обозначаем $|r|_p$.

Используя неравенства (6), нетрудно показать, что

$$|\alpha_i| \ll 1, \quad |\gamma_i|_p \ll 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

то есть корни ограничены. Определим множества для корней многочлена $P \in \mathcal{P}_n$

$$\begin{aligned} S_1(\alpha_j) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_j| = \min_{1 \leq i \leq n} |x - \alpha_i|\}, \\ S_2(\alpha_s) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_s| = \min_{1 \leq i \leq n} |z - \alpha_i|\}, \\ S_3(\gamma_k) &= \{w \in \mathbb{Q}_p : |w - \gamma_k|_p = \min_{1 \leq i \leq n} |w - \gamma_i|_p\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества $S_1(\alpha_j)$, $S_2(\alpha_s)$, $S_3(\gamma_k)$ для фиксированного набора j, s, k , и для упрощения обозначений будем полагать, что $j = 1$, $\alpha_s = \beta_1$ и $k = 1$, где множество корней $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ является перестановкой множества корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Упорядочим остальные корни P так, что

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_2| &\leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|, \\ |\beta_1 - \beta_2| &\leq |\beta_1 - \beta_3| \leq \dots \leq |\beta_1 - \beta_n|, \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p &\leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leq \dots \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p. \end{aligned}$$

Для многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ определим действительные числа ρ_{ij} ($i = 1, 2, 3$) из соотношений

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_j| &= H^{-\rho_{1j}}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad \rho_{12} \geq \rho_{13} \dots \geq \rho_{1n}, \\ |\beta_1 - \beta_j| &= H^{-\rho_{2j}}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad \rho_{22} \geq \rho_{23} \dots \geq \rho_{2n}, \\ |\gamma_1 - \gamma_j|_p &= H^{-\rho_{3j}}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad \rho_{32} \geq \rho_{33} \dots \geq \rho_{3n}. \end{aligned}$$

В силу того, что корни $|\alpha_j|$, $|\beta_s|$, $|\gamma_k|_p$ ограничены, получаем, что существует постоянная $\varepsilon_1 > 1$ такая, что $\rho_{ij} \geq -\frac{\varepsilon_1}{2}$ для $i = 1, 2, 3$ и $2 \leq j \leq n$. Возьмем достаточно малое число $\varepsilon > 0$, так что $\varepsilon_1 = \varepsilon N^{-1}$ для достаточно большого N , и пусть $T = [\varepsilon_1^{-1}]$. Определим целые числа k_j , l_j и m_j , $2 \leq j \leq n$, из неравенств

$$\begin{aligned} \frac{k_j - 1}{T} &\leq \rho_{1j} < \frac{k_j}{T}, \quad \frac{l_j - 1}{T} \leq \rho_{2j} < \frac{l_j}{T}, \quad \frac{m_j - 1}{T} \leq \rho_{3j} < \frac{m_j}{T}, \\ k_2 \geq k_3 \geq \dots \geq k_n \geq 0, \quad l_2 \geq l_3 \geq \dots \geq l_n \geq 0, \quad m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_n \geq 0. \end{aligned}$$

Далее определим числа q_i , r_i и s_i

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{k_{i+1} + \dots + k_n}{T}, \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ r_i &= \frac{l_{i+1} + \dots + l_n}{T}, \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ s_i &= \frac{m_{i+1} + \dots + m_n}{T}, \quad (1 \leq i \leq n-1). \end{aligned} \tag{10}$$

С каждым многочленом $P \in \mathcal{P}_n(H)$ будем связывать три целочисленных вектора $\mathbf{q} = (k_2, \dots, k_n)$, $\mathbf{r} = (l_2, \dots, l_n)$ и $\mathbf{s} = (m_2, \dots, m_n)$. Число таких векторов конечно (и зависит только от n , p и T), см. [17, лемма 24, стр. 46 и лемма 12, стр. 99]. Многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$ с одним и тем же набором векторов $(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ объединим в подмножество $\mathcal{P}_n(H, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$.

Без ограничения общности, будем считать, что $x \in S_1(\alpha_1)$, $z \in S_2(\beta_1)$ и $w \in S_3(\gamma_1)$. В ходе доказательства теоремы будем оценивать значения многочленов, часто используя разложение в ряд Тейлора. Для получения оценок сверху для членов разложения в ряд Тейлора (и для других целей) будем использовать следующие две леммы (доказанные в [7] и [15]).

ЛЕММА 3. Пусть $P \in \mathcal{P}_n$. Тогда

$$\begin{aligned} |u - \alpha| &\leq 2^n |P(u)| |P'(\alpha)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p &\leq |P(w)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \\ |u - \alpha| &\leq \min_{2 \leq j \leq n} \left(2^{n-j} |P(u)| |P'(\alpha)|^{-1} \prod_{k=2}^j |\alpha - \alpha_k| \right)^{\frac{1}{j}}, \\ |w - \gamma_1|_p &\leq \min_{2 \leq j \leq n} \left(|P(w)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1} \prod_{k=2}^j |\gamma_1 - \gamma_k|_p \right)^{\frac{1}{j}} \end{aligned}$$

где $u = x$ или $u = z$ и $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \beta_1$ соответственно.

Зафиксируем $\delta_1 > 0$. Удалим из параллелепипеда $\mathbf{T}$ множество малой меры так, чтобы в оставшейся части выполнялось неравенство $|\operatorname{Im} z| \geq \delta_1$. Используя лемму 3 при $j = n$, получаем, что $|z - \beta| < H(P)^{-\nu}$, где $\nu > 0$; поскольку правая часть неравенства стремится к нулю при $H(P) \rightarrow \infty$, то существует корень β такой, что $|\operatorname{Im} \beta| > \frac{1}{2}\delta_1$. В данном случае, существует также сопряженный корень $\bar{\beta}$ многочлена P такой, что $|\beta - \bar{\beta}| > \delta_1$, и для каждого действительного корня α многочлена P справедливы оценки $|\beta - \alpha| = |\bar{\beta} - \alpha| > \frac{1}{2}\delta_1$. Объединяя вышесказанное, получаем

$$|\operatorname{Im} \beta| > \frac{1}{2}\delta_1, \quad |\operatorname{Im} z| \geq \delta_1, \quad |\beta - \bar{\beta}| > \delta_1, \quad |\beta - \alpha| > \frac{1}{2}\delta_1. \quad (11)$$

ЛЕММА 4. Пусть $P \in \mathcal{P}_n(H, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$. Тогда

$$\begin{aligned} |P^{(l)}(\alpha_1)| &< c(n) H^{1-q_l + (n-l)\varepsilon_1}, \\ |P^{(l)}(\beta_1)| &< c(n) H^{1-r_l + (n-l)\varepsilon_1}, \\ |P^{(l)}(\gamma_1)|_p &< c(n) H^{-s_l + (n-l)\varepsilon_1}, \end{aligned}$$

где $1 \leq l \leq n-1$, и

$$|P'(\alpha_1)| > H^{1-q_1}, \quad |P'(\beta_1)| > H^{1-r_1}, \quad |P'(\gamma_1)|_p > H^{-s_1}. \quad (12)$$

В нескольких местах доказательства теоремы возникает необходимость рассматривать специальные типы многочленов. При рассмотрении одного из типов многочленов нам необходимо получить противоречие с итоговым неравенством в следующей лемме, доказанной в [11].

ЛЕММА 5. Пусть P_1 и P_2 – два целочисленных многочлена степени не выше n без общих корней и $\max(H(P_1), H(P_2)) \leq H$. Пусть $\delta > 0$ и $\eta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – интервал, $K \subset \mathbb{C}$ – круг и $D \subset \mathbb{Q}_p$ – цилиндр, где $\mu_1(I) = H^{-\eta_1}$, $\text{diam} K = H^{-\eta_2}$ и $\mu_3(D) = H^{-\eta_3}$. Если существуют такие $\tau_1 > -1$, $\tau_2 > -1$ и $\tau_3 > 0$, что для всех $(x, z, w) \in I \times K \times D$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |P_j(x)| &< H^{-\tau_1}, \\ |P_j(z)| &< H^{-\tau_2}, \\ |P_j(w)|_p &< H^{-\tau_3}, \end{aligned}$$

для $j = 1, 2$, то

$$\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3 + 3 + 2\max(\tau_1 + 1 - \eta_1, 0) + 4\max(\tau_2 + 1 - \eta_2, 0) + 2\max(\tau_3 - \eta_3, 0) < 2n + \delta.$$

Далее сформулируем два классических результата. Первый из них является модификацией признака Коши, второй из которых – лемма Бореля–Кантелли.

ЛЕММА 6. Пусть $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция. Тогда ряды

$$\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \Psi(2^k)$$

сходятся или расходятся одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойство, что Ψ – монотонно убывающая функция, получим следующее двойное неравенство

$$2^{k+1} \Psi(2^{k+1}) \ll \sum_{2^k \leq h < 2^{k+1}} \Psi(h) \ll 2^k \Psi(2^k).$$

Суммирование по всем $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ приводит к тому, что указанные в лемме ряды сходятся или расходятся одновременно. $\square$

ЛЕММА 7 (Борель–Кантелли). Пусть Ω – некоторое множество, на котором определена σ -аддитивная мера λ . Пусть $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ – последовательность λ -измеримых подмножеств Ω . Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) < \infty,$$

то множество

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} E_l = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k$$

имеет нулевую λ -меру.

3 Доказательство теоремы 3 для случая $k = l = m = 1$

Поскольку $|\alpha_i| \ll 1$ и $|\gamma_i|_p \ll 1$, $1 \leq i \leq n$, то используя лемму 3 (при $j = n$ и $H \leq H_0$), получаем, что множество точек (x, z, w) , удовлетворяющих (4), является подмножеством множества $\mathbf{T} = I \times K \times D$, где $I = [-c(n), c(n)]$, $K = \{z : |z| \leq c(n)\}$ и $D = \{w : |w|_p \ll 1\}$.

Сначала докажем, что теорема справедлива при $n = 3$.

ЛЕММА 8. Если $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, то $\mu(L_3(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (4) при $n = 3$ примет вид

$$|P(x)| < \Psi^{\lambda_1}(H), \quad |P(z)| < \Psi^{\lambda_2}(H), \quad |P(w)|_p < \Psi^{\lambda_3}(H). \quad (13)$$

В правой части неравенств стоят величины, стремящиеся к нулю при $H \rightarrow \infty$. Поэтому, используя лемму 3, нетрудно показать, что при $H > H_0$ существуют действительный корень α многочлена P , комплексный корень β и его сопряженный корень $\bar{\beta}$, близкие к x , z и $\bar{z}$ соответственно. В силу неравенства (6) and (11) модули разностей $|\alpha - \beta| = |\alpha - \bar{\beta}|$ и $|\beta - \bar{\beta}|$ ограничены снизу величиной $c(\delta_1)$. Поэтому

$$\min(|P'(\alpha)|, |P'(\beta)|) > c(n, \delta_1)H(P).$$

При $|P'(\gamma)|_p < c(n, \delta_1)$ возникшая ситуация полностью аналогична задаче о неравенстве $|P(w)|_p < H^{-3}\Psi(H)$, которая рассмотрена в [15, 5]. Поэтому далее считаем, что

$$|P'(\gamma)|_p > c(n, \delta_1), \quad w \in S_3(\gamma).$$

Зафиксируем H . Для многочлена $P \in \mathcal{P}_3(H)$ обозначим через $\sigma(P)$ множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha) \times S_2(\beta) \times S_3(\gamma)$, удовлетворяющих (13). Пусть $A_H = \cup_{P \in \mathcal{P}_3(H)} \sigma(P)$. Тогда, $L_3(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ – множество точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_H . Используя лемму 3 и два вышеприведенных неравенства, получаем, что мера множества $\sigma(P)$ удовлетворяет условию

$$\mu(\sigma(P)) < c(n)H^{-3}\Psi(H).$$

Суммируя последнюю оценку по трем оставшимся коэффициентам многочленов P , получаем $\mu(A_H) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_3(H)} \mu(\sigma(P)) < c(n)\Psi(H)$. Таким образом, в силу условия $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$ имеем

$$\sum_{H=1}^{\infty} \mu(A_H) \ll \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty,$$

применение леммы Бореля-Кантелли дает требуемый результат, то есть $\mu(L_3(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$. $\square$

Напомним, что далее мы рассматриваем неприводимые многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$, удовлетворяющие (6), и $n \geq 4$. Многочлен $P \in \mathcal{P}_n(H, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ будем называть (i_1, i_2, i_3) -линейным и $i_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, если выполняется система неравенств

$$\begin{aligned} q_1 + k_2 T^{-1} &< v_1 + \lambda_1 + 1, \\ r_1 + l_2 T^{-1} &< v_2 + \lambda_2 + 1, \\ s_1 + m_2 T^{-1} &< v_3 + \lambda_3, \end{aligned} \quad (14)$$

и $i_j = 1$, $j = 1, 2, 3$, если все знаки неравенств в (14) заменяются на $\geq$. Например, $(0, 1, 1)$ -линейность означает, что в системе неравенств (14) в первом неравенстве знак сохраняется, а во втором и третьем – заменяется на $\geq$. Пусть $\mathcal{P}_n^{(i_1, i_2, i_3)}$, $i_j = 0, 1$, $j = 1, 2, 3$, обозначает класс (i_1, i_2, i_3) -линейных многочленов $P \in \mathcal{P}_n$. Если $(x, z, w) \in L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$, то существует бесконечно много многочленов для по крайней мере одного из восьми типа линейности. Пусть $L_n^{(i_1, i_2, i_3)}(v, \lambda, \Psi)$ обозначает множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, для которых система неравенств (4) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(i_1, i_2, i_3)}$. Очевидно, что $L_n(v, \lambda, \Psi) = \bigcup_{i_1, i_2, i_3=0,1} L_n^{(i_1, i_2, i_3)}(v, \lambda, \Psi)$. Следовательно, для доказательства теоремы покажем, что каждое множество $L_n^{(i_1, i_2, i_3)}(v, \lambda, \Psi)$ имеет нулевую меру.

Величины

$$d_1 = q_1 + 2r_1 + s_1 \quad \text{и} \quad d_2 = (k_2 + 2l_2 + m_2)T^{-1}$$

будут использоваться на протяжении всего доказательства, которое разбивается на ряд предложений с различными условиями линейности и различными диапазонами значений величины $d_1 + d_2$.

Сначала рассмотрим $(0, 0, 0)$ -линейные многочлены.

Случай 1: $(0, 0, 0)$ -линейность.

Для доказательства $\mu(L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$ рассмотрим четыре подслучая, каждый из которых соответствует различным значениям величины $d_1 + d_2$. Если $(x, z, w) \in L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$, то существует бесконечно много многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих системе неравенств (4) и одному из условий для $d_1 + d_2$. Таким образом, если мы докажем, что множество точек, для которых существует бесконечное число многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих системе (4) и каждому диапазону значений величины $d_1 + d_2$, имеет меру нуль, то мы докажем, что $\mu(L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. Множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, для которых система неравенств (4) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих условию $d_1 + d_2 > n + \varepsilon$, имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$ и $d_1 + d_2 > n + \varepsilon$. Класс таких многочленов P обозначим $\mathcal{P}_1^t$. Пусть $\sigma(P)$ обозначает множество

точек $\mathbf{u} = (x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha_1) \times S_2(\beta_1) \times S_3(\gamma_1)$, удовлетворяющих (5). В силу (12) и леммы 3 каждая точка $\mathbf{u} \in \sigma(P)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &\ll 2^{-t(v_1 + \lambda_1 + 1 - q_1)}, \\ |z - \beta_1| &\ll 2^{-t(v_2 + \lambda_2 + 1 - r_1)}, \\ |w - \gamma_1|_p &\ll 2^{-t(v_3 + \lambda_3 - s_1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $A_t = \cup_{P \in \mathcal{P}_1^t} \sigma(P)$. Тогда множество точек, удовлетворяющих условиям в предложении 1, есть множество точек, принадлежащих бесконечному числу A_t . Для того, чтобы воспользоваться леммой Бореля-Кантелли, нам нужно показать, что $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$.

Поделим первоначальный параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды $M = I_M \times K_M \times D_M$ такие, что

$$\mu_1(I_M) = 2^{-tk_2T^{-1}}, \quad \text{diam}(K_M) = 2^{-tl_2T^{-1}}, \quad \mu_3(D_M) = 2^{-tm_2T^{-1}}. \quad (16)$$

Будем говорить, что многочлен P принадлежит параллелепипеду M , если найдется точка $\mathbf{u} \in M$, в которой выполняется система неравенств (5). Предположим, что P принадлежит M . Далее разложим $P \in \mathcal{P}_1^t$ на M в ряд Тейлора по каждой координате. Учитывая, что $P(\alpha_1) = P(\beta_1) = P(\gamma_1) = 0$ и

$$P(t) = \sum_{j=1}^n (j!)^{-1} P^{(j)}(\zeta_1) (t - \zeta_1)^j$$

для $t = x, z, w$ и $\zeta_1 = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ соответственно, оценим сверху значения $|P(x)|$, $|P(z)|$ и $|P(w)|_p$. Например, оценим $|P(z)|$. Воспользуемся следующими неравенствами

$$r_j + jl_2T^{-1} = r_j + l_2T^{-1} + (j-1)l_2T^{-1} \geq r_j + l_2T^{-1} + (l_2 + \dots + l_j)T^{-1} = r_1 + l_2T^{-1},$$

которые непосредственно следуют из (10). Далее, используя (16) и лемму 4, получаем

$$|P'(\beta_1)||z - \beta_1| \ll 2^{t(1-r_1+(n-1)\varepsilon_1-l_2T^{-1})} \ll 2^{-t(r_1+l_2T^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}$$

и

$$|P^{(j)}(\beta_1)||z - \beta_1|^j \ll 2^{t(1-r_j+(n-j)\varepsilon_1-jl_2T^{-1})} \ll 2^{-t(r_1+l_2T^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}, \quad 2 < j \leq n.$$

Следовательно, выполняется неравенство $|P(z)| \ll 2^{-t(r_1+l_2T^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}$ для любой точки $z \in K_M$. Нетрудно получить аналогичные оценки для $|P(x)|$ и $|P(w)|_p$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll 2^{-t(q_1+k_2T^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2T^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(w)|_p &\ll 2^{-t(s_1+m_2T^{-1}-(n-1)\varepsilon_1)} \end{aligned} \quad (17)$$

для любой точки $(x, z, w) \in M$.

Сначала рассмотрим параллелепипеды M , которым принадлежит два и более многочленов. Эти многочлены неприводимы, имеют высоту, не превосходящую 2^{t+1} , и их степень не превосходит n . Для таких многочленов на M выполняется система неравенств (17). Используя лемму 5 для двух различных многочленов P_1 и P_2 , где

$$\begin{aligned}\tau_1 &= q_1 + k_2 T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1, & \eta_1 &= k_2 T^{-1}, \\ \tau_2 &= r_1 + l_2 T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1, & \eta_2 &= l_2 T^{-1}, \\ \tau_3 &= s_1 + m_2 T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1, & \eta_3 &= m_2 T^{-1},\end{aligned}$$

получаем, что

$$3q_1 + k_2 T^{-1} + 6r_1 + 2l_2 T^{-1} + 3s_1 + m_2 T^{-1} - 12(n-1)\varepsilon_1 < 2n + \delta.$$

Поскольку $q_1 \geq k_2 T^{-1}$, $2r_1 \geq 2l_2 T^{-1}$ и $s_1 \geq m_2 T^{-1}$, предыдущее неравенство принимает вид

$$2(d_1 + d_2) - 12(n-1)\varepsilon_1 < 2n + \delta.$$

Для достаточно малого числа δ последнее неравенство противоречиво ввиду условия для $d_1 + d_2$ в предложении 1.

Теперь рассмотрим параллелепипеды M , которым принадлежит не более одного многочлена $P \in \mathcal{P}_1^t$. Число таких параллелепипедов, а, следовательно, и число многочленов не более чем $c(n)2^{t(k_2+2l_2+m_2)T^{-1}} = c(n)2^{td_2}$. Используя неравенства (15), получаем

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(v_1+2v_2+v_3+\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+3-d_1-d_2)} \ll 2^{-t(n+1-d_1-d_2)}.$$

Из (14) следует, что $d_1 + d_2 < n + 1$ и $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t(n+1-d_1-d_2)} < \infty$, применяя лемму Бореля-Кантелли, мы завершаем доказательство предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. Множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, для которых система неравенств (4) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих условию $d_1 + d_2 < \varepsilon$, имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$ и $d_1 + d_2 < \varepsilon$. Класс таких многочленов P обозначим $\mathcal{P}_2^t$. В силу того, что $d_1 + d_2 < \varepsilon$, следует, что $q_1 < \varepsilon$, $r_1 < \varepsilon$ и $s_1 < \varepsilon$. Для многочлена P определим множество $\sigma_2(P)$, состоящее из точек $(x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha_1) \times S_2(\beta_1) \times S_3(\gamma_1)$, удовлетворяющих (4). Согласно лемме 3, каждая точка в $\sigma_2(P)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}|x - \alpha_1| &\ll 2^{-tv_1} \Psi^{\lambda_1}(2^t) |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z - \beta_1| &\ll 2^{-tv_2} \Psi^{\lambda_2}(2^t) |P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p &\ll 2^{-tv_3} \Psi^{\lambda_3}(2^t) |P'(\gamma_1)|_p^{-1}.\end{aligned}\tag{18}$$

Пусть $A_t = \cup_{P \in \mathcal{P}_2^t} \sigma_2(P)$. Тогда множество точек, удовлетворяющих условиям предложения 2, есть множество точек, принадлежащих бесконечному числу A_t . Аналогично, как и в предложении 1, наша цель – доказать, что $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$, и затем воспользоваться леммой Бореля-Кантелли.

Для достаточно большого числа t определим параллелепипед $\sigma_3(P)$ как множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha_1) \times S_2(\beta_1) \times S_3(\gamma_1)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &< c_1(n)|P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z - \beta_1| &< c_1(n)|P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p &< c_1(n)|P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \end{aligned}$$

содержащий $\sigma_2(P)$. Значение величины $c_1(n)$ будет приведено позднее.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b} = (a_3, a_4, \dots, a_n)$, где a_j – j -ый коэффициент $P \in \mathcal{P}_2^t$. Подмножество многочленов из $\mathcal{P}^t$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}$ обозначим $\mathcal{P}_{2,\mathbf{b}}^t$. Разложим многочлены из $\mathcal{P}_{2,\mathbf{b}}^t$ на $\sigma_3(P)$ в ряд Тейлора и оценим сверху значения $|P(x)|$, $|P(z)|$ и $|P(w)|_p$. Проведем это только для действительной переменной. Используя лемму 4 и факт, что $q_j \leq q_1 < \varepsilon$ для $j \geq 2$, получаем

$$|P'(\alpha_1)||x - \alpha_1| < c_1(n)c(n),$$

и

$$|P^{(j)}(\alpha_1)||x - \alpha_1|^j < 2^{t(1-q_j+(n-j)\varepsilon_1-j+q_1)} c_1(n)c(n) < c_1(n)c(n), \quad 2 \leq j \leq n.$$

Аналогично получаются оценки для $|P(z)|$ и $|P(w)|_p$, поэтому выполняется следующая система неравенств

$$\begin{aligned} |P(x)| &< c_1(n)c(n), \\ |P(z)| &< c_1(n)c(n), \\ |P(w)|_p &< c_1(n)c(n). \end{aligned}$$

Покажем, что параллелепипеды $\sigma_3(P_1)$ и $\sigma_3(P_2)$, где $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{2,\mathbf{b}}^t$, $P_1 \neq P_2$, не пересекаются при достаточно малом значении $c_1(n)$. Предположим противное, то есть

$$\sigma_3(P_1, P_2) = \sigma_3(P_1) \cap \sigma_3(P_2) \neq \emptyset.$$

Пусть $R(f) = P_1(f) - P_2(f)$, то есть R – многочлен вида $R(f) = b_2 f^2 + b_1 f + b_0$, $|b_i| \leq 2^{t+2}$, $i = 0, 1, 2$. Ясно, что

$$\max(|R(x)|, |R(z)|) < c_1(n)c(n).$$

Последнюю систему неравенств перепишем в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} b_2 x^2 + b_1 x + b_0 &= \theta_1(x) c_1(n) c(n), \\ b_2 z^2 + b_1 z + b_0 &= \theta_2(z) c_1(n) c(n), \\ b_2 \bar{z}^2 + b_1 \bar{z} + b_0 &= \overline{\theta_2(z)} c_1(n) c(n), \end{aligned} \tag{19}$$

где $|\theta_k| \leq 1$, $k = 1, 2$. Определитель Δ предыдущей системы равен $\Delta = 2z_2(z_2^2 + (x - z_1)^2)i$, где $z = z_1 + iz_2$ и $\bar{z} = z_1 - iz_2$. Из (11) следует, что $|\Delta| > 2\delta_1^3$. Разрешим систему уравнений (19) относительно одного из коэффициентов $b_j \neq 0$, $0 \leq j \leq 2$. Получим неравенство $1 \leq |b_j| < c_1(n)c(n)\delta_1^{-3}$, которое при достаточно малом $c_1(n) = c_1(n, \delta_1)$ противоречиво. Таким образом, параллелепипеды $\sigma_3(P_1)$ и $\sigma_3(P_2)$ не пересекаются и

$$\sum_{P \in P_{2,b}^t} \mu(\sigma_3(P)) \leq \mu(T).$$

Из определения $\sigma_2(P)$ и $\sigma_3(P)$ можно получить, что

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_2(P)) &< c_1(n)^{-4} c(n)^4 \mu(\sigma_3(P)) 2^{-t(v_1+2v_2+v_3)} \Psi^{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}(2^t) \ll \\ &\ll \mu(\sigma_3(P)) 2^{-t(n-3)} \Psi(2^t). \end{aligned}$$

Поскольку число различных классов $\mathcal{P}_{2,b}^t$ не превосходит $c(n)2^{t(n-2)}$, то используя вышеприведенные два неравенства и лемму 6, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \mu(A_t) &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{P \in P_{2,b}^t} \mu(\sigma_2(P)) < \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{P \in P_{2,b}^t} \mu(\sigma_3(P)) 2^{-t(n-3)} \Psi(2^t) \\ &\ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^t \Psi(2^t) \mu(T) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, применяя лемму Бореля-Кантелли, мы завершаем доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. Множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, для которых система неравенств (4) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих условию $\varepsilon \leq d_1 + d_2 < 4 - \varepsilon$, имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$ и $\varepsilon \leq d_1 + d_2 < 4 - \varepsilon$. Класс таких многочленов P обозначим $\mathcal{P}_3^t$. Для многочлена $P \in \mathcal{P}_3^t$ определим $\sigma_2(P)$ как и в предложении 2, и пусть $A_t = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_3^t} \sigma_2(P)$. Как и ранее, множество точек, удовлетворяющих условиям предложения 3, есть множество точек, принадлежащих бесконечному числу A_t . Далее мы покажем, что $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$ и затем воспользуемся леммой Бореля-Кантелли.

Выберем числа V_1 , V_2 и V_3 , такие, что $V_1 + 2V_2 + V_3 = 1$ и

$$\begin{aligned} q_1 + k_2 T^{-1} + (n-1)\varepsilon_1 &< V_1 + 1 < v_1 + \lambda_1 + 1, \\ r_1 + l_2 T^{-1} + (n-1)\varepsilon_1 &< V_2 + 1 < v_2 + \lambda_2 + 1, \\ s_1 + m_2 T^{-1} + (n-1)\varepsilon_1 &< V_3 < v_3 + \lambda_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Такой выбор возможен в силу следующего. Система неравенств (20) задает параллелепипед. Рассмотрим пересечение параллелепипеда с плоскостями, задаваемыми уравнениями $V_1 + 2V_2 + V_3 = k$, где k – изменяющийся параметр. В "верхней правой" вершине параллелепипеда имеем $V_1 + 2V_2 + V_3 = n - 2 > 1$. В "нижней левой" вершине параллелепипеда получаем

$$\begin{aligned} V_1 + 2V_2 + V_3 &= q_1 + 2r_1 + s_2 + (k_2 + 2l_2 + m_2)T^{-1} + 4(n-1)\varepsilon_1 - 3 \\ &= d_1 + d_2 + 4(n-1)\varepsilon_1 - 3 < 1 - \varepsilon/2 \end{aligned}$$

так как $d_1 + d_2 < 4 - \varepsilon$. Таким образом, по непрерывности, плоскость $V_1 + 2V_2 + V_3 = 1$ пересекает параллелепипед, и мы можем выбрать числа V_1, V_2, V_3 , принадлежащие пересечению.

Определим параллелепипед $\sigma_4(P)$ как множество точек

$$(x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha_1) \times S_2(\beta_1) \times S_3(\gamma_1),$$

удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &< 2^{-tV_1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z - \beta_1| &< 2^{-tV_2} |P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p &< 2^{-tV_3} |P'(\gamma_1)|_p^{-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Очевидно, $\sigma_2(P) \subset \sigma_4(P)$. Снова разложим многочлен P на $\sigma_4(P)$ в ряд Тейлора и оценим каждый член разложения сверху. Проделаем это для комплексной переменной. Используя (10), (20), (21), лемму 3 и лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} |P'(\beta_1)| |z - \beta_1| &\ll 2^{-tV_2}, \\ |P''(\beta_1)| |z - \beta_1|^2 &\ll 2^{t(1-r_2+(n-2)\varepsilon_1-2V_2-2+2r_1)} \ll \\ &\ll 2^{t(r_1+l_2T^{-1}+(n-2)\varepsilon_1-2V_2-1)} \ll 2^{-tV_2}, \\ |P^{(j)}(\beta_1)| |z - \beta_1|^{(j)} &\ll 2^{t(1-r_j+(n-j)\varepsilon_1-jV_2-j+jr_1)} \ll 2^{-tV_2}, \quad 3 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Аналогично получаются оценки для $|P(x)|$ и $|P(w)|_p$, что приводит к системе неравенств

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll 2^{-tV_1}, \\ |P(z)| &\ll 2^{-tV_2}, \\ |P(w)|_p &\ll 2^{-tV_3}. \end{aligned} \tag{22}$$

Далее оценим $P'(x) = \sum_{i=1}^n (i!)^{-1} P^{(i)}(\alpha_1) (x - \alpha_1)^{i-1}$ на $\sigma_4(P)$. Как и ранее, рассмотрим отдельно каждый член разложения, используя лемму 3, лемму 4, (10) и (20). Тогда получаем

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)| &\ll 2^{-t(1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P^{(i)}(\alpha_1)| |x - \alpha_1|^{i-1} &\ll 2^{t(1-q_i+(n-i)\varepsilon_1-(i-1)V_1-(i-1)(1-q_1))} \\ &\ll 2^{t(1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Из последних неравенств и аналогичных неравенств для $P'(z)$ на $\sigma_4(P)$ получаем

$$\begin{aligned} |P'(x)| &\ll 2^{t(1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P'(z)| &\ll 2^{t(1-r_1+(n-1)\varepsilon_1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Если выполняются одновременно оба неравенства $q_1 < \varepsilon/2$ и $r_1 < \varepsilon/2$, то доказательство проводится как в предложении 2. Поэтому далее в предложении 3 мы предполагаем, что $\max(q_1, r_1) \geq \varepsilon/2$. Пусть максимум достигается на q_1 , тогда дополнительно к условиям предположения 3 имеем $q_1 \geq \varepsilon/2$. Зафиксируем вектор $\mathbf{d} = (a_4, a_5, \dots, a_n)$, $|a_j| \leq 2^{t+1}$ и обозначим через $\mathcal{P}_{3,\mathbf{d}}^t$ подмножество многочленов $P \in \mathcal{P}_3^t$ с одним и тем же вектором $\mathbf{d}$. Далее будем использовать метод существенных и несущественных областей Спринджука (см. [17]). Параллелепипед $\sigma_4(P_1)$ назовем *существенным*, если для любого другого многочлена $P_2 \in \mathcal{P}_{3,\mathbf{d}}^t$, $P_2 \neq P_1$, выполняется неравенство

$$\mu(\sigma_4(P_1) \cap \sigma_4(P_2)) < \frac{1}{2}\mu(\sigma_4(P_1)).$$

Если же существует $P_2 \in \mathcal{P}_{3,\mathbf{d}}^t$, $P_2 \neq P_1$, такой, что

$$\mu(\sigma_4(P_1) \cap \sigma_4(P_2)) \geq \frac{1}{2}\mu(\sigma_4(P_1)),$$

то параллелепипед $\sigma_4(P_1)$ будем называть *несущественным*. Если $\mathbf{u}$ принадлежит бесконечному числу параллелепипедов $\sigma_2(P)$, то $\mathbf{u}$ принадлежит бесконечному числу существенных или несущественных параллелепипедов $\sigma_4(P)$. Обозначим множество многочленов $P \in \mathcal{P}_{3,\mathbf{d}}^t$, для которых $\sigma_4(P)$ является существенным, через $\mathcal{E}_{3,\mathbf{d}}^t$, и множество $P \in \mathcal{P}_{3,\mathbf{d}}^t$, для которых $\sigma_4(P)$ является несущественным, через $\mathcal{I}_{3,\mathbf{d}}^t$.

Во-первых, предположим, что $P \in \mathcal{E}_{3,\mathbf{d}}^t$. Тогда имеем $\sum_{P_1 \in \mathcal{E}_{3,\mathbf{d}}^t} \mu(\sigma_4(P_1)) \ll \mu(T)$. Из (18) и (21) получаем

$$\mu(\sigma_2(P_1)) \ll \mu(\sigma_4(P_1))2^{t(-v_1-2v_2-v_3+V_1+2V_2+V_3)}\Psi(2^t) = \mu(\sigma_4(P_1))2^{t(-n+4)}\Psi(2^t).$$

Используя последнее неравенство, лемму 6 и факт, что число различных классов $\mathcal{P}_{3,\mathbf{d}}^t$ не превосходит $c(n)2^{t(n-3)}$, получаем

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{d}} \sum_{P_1 \in \mathcal{E}_{3,\mathbf{d}}^t} \mu(\sigma_2(P_1)) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^t \Psi(2^t) \mu(T) < \infty.$$

Следовательно, согласно лемме Бореля-Кантелли множество точек, принадлежащих бесконечному числу параллелепипедов $\sigma_2(P)$, $P \in \mathcal{E}_{3,\mathbf{d}}^t$, имеет меру нуль.

Далее предположим, что $P \in \mathcal{I}_{3,\mathbf{d}}^t$, то есть существует многочлен $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{3,\mathbf{d}}^t$ такой, что

$$\sigma_4(P, \tilde{P}) = \sigma_4(P) \cap \sigma_4(\tilde{P}), \quad \text{и} \quad \mu(\sigma_4(P, \tilde{P})) \geq \frac{1}{2}\mu(\sigma_4(P)).$$

Системы неравенств (22) и (23) выполняются одновременно на $\sigma_4(P, \tilde{P})$ для P и $\tilde{P}$. Поэтому, если $R(f) = \tilde{P}(f) - P(f) = b_3 f^3 + b_2 f^2 + b_1 f + b_0$, то многочлен R удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |R(x)| &\ll 2^{-tV_1}, \\ |R(z)| &\ll 2^{-tV_2}, \\ |R(w)|_p &\ll 2^{-tV_3}, \\ |R'(x)| &\ll 2^{t(1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |R'(z)| &\ll 2^{t(1-r_1+(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $q_1 \geq \varepsilon/2$. Если θ_1, θ_2 и θ_3 – комплексные корни многочлена R , то

$$R(f) = b_3(f - \theta_1)(f - \theta_2)(f - \theta_3),$$

и

$$R'(\theta_1) = b_3(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3).$$

Из (24) следует, что один из корней обязательно действительный, а два других – комплексно сопряженные. Пусть $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_3 = \bar{\theta}_2$, и будем считать, что $|b_3| \asymp H(R)$ (если необходимо воспользуемся сведением к ведущим многочленам как в разделе 2.1). В силу (11) величина $|\theta_1 - \theta_2|$ не может стремиться к нулю. Следовательно, корни θ_1, θ_2 , и $\bar{\theta}_2$ удовлетворяют неравенству $|\theta_1 - \theta_2| = |\theta_1 - \bar{\theta}_2| > c_2(\delta_1)$ для некоторой константы $c_2(\delta_1)$, и

$$|R'(\theta_1)| > c_2(\delta_1)H(R).$$

Откуда, используя (24) и лемму 3, получаем

$$|x - \theta_1| \ll 2^{-tV_1} H^{-1}(R)$$

для $x \in \sigma_4(P_1, P_2)$. В силу (21) неравенство $|R(x)| \ll 2^{-tV_1}$ выполняется на интервале длины $c(n)2^{-tV_1}|P'(\alpha_1)|^{-1}$.

Далее, используя лемму 4, имеем $2^{-tV_1} H^{-1}(R) \gg 2^{-t(V_1+1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)}$ и $H(R) < 2^{t(1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)}$. Перейдем от величины 2^t к высоте $H(R)$ в (24) и получим, что $|R(x)||R(z)|^2|R(w)|_p \ll H(R)^{-1/(1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)} \ll H(R)^{-v}$, где $v > 1$, поскольку $q_1 \geq \varepsilon/2$ и выберем $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}$. Полученное неравенство с применением леммы 5 показывает, что множество точек $\mathbf{u}$, принадлежащих бесконечному числу несущественных параллелепипедов, имеет меру нуль. Вместе с результатом для существенных параллелепипедов, это завершает доказательство предложения 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. Множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, для которых система неравенств (4) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих условию

$$4 - \varepsilon \leq d_1 + d_2 \leq n + \varepsilon, \quad (25)$$

имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результаты этого предложения будут использоваться и в других случаях линейности. Перейдем от системы неравенств (4) к системе неравенств (5), и будем следовать доказательству предложения 1 до системы (17) включительно. Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$ и $4 - \varepsilon \leq d_1 + d_2 \leq n + \varepsilon$. Обозначим это множество $\mathcal{P}_4^t$. Пусть $A_t = \cup_{P \in \mathcal{P}_4^t} \sigma(P)$, где $\sigma(P)$ определен в (15).

Пусть $u = n + 1 - d_1 - d_2$ и зафиксируем $\theta = u - \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 > 0$ — достаточно малое число. Предположим, что существует не более $2^{t\theta}$ многочленов, принадлежащих каждому параллелепипеду M . Тогда согласно лемме 3, мера множества A_t не превосходит меры параллелепипеда $\sigma(P)$, умноженной на число параллелепипедов M и $2^{t\theta}$, то есть

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(v_1+2v_2+v_3+\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+3-d_1-d_2-\theta)} \ll 2^{-t(n+1-d_1-d_2-\theta)} \ll 2^{-t\varepsilon_2}.$$

Поэтому $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t(n+1-d_1-d_2-\theta)} < \infty$. Следовательно, мера множества точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_t , имеет меру нуль согласно леммы Бореля-Кантелли.

Далее будем считать, что существует параллелепипед M содержащий не менее $2^{t\theta}$ многочленов. Из (25) следует, что $1 - \varepsilon \leq u \leq n - 3 + \varepsilon$. Пусть $u_1 = u - d$, где $d = 0.23$. Запишем u_1 в виде суммы целой и дробной части $[u_1] + \{u_1\}$ и вычислим

$$n - [u_1] = d_1 + d_2 - 1 + \{u_1\} + d > 3. \quad (26)$$

Согласно принципу ящиков Дирихле, существует $k \geq c(n)2^{t(d+\{u_1\}-\varepsilon_2)}$ многочленов $P_1, \dots, P_k$ среди $2^{t\theta}$ многочленов, у которых коэффициенты при $x^n, x^{n-1}, \dots, x^{n-[u_1]+1}$ совпадают. Рассмотрим $k - 1$ многочленов $R_j(f) = P_j(f) - P_1(f)$, $2 \leq j \leq k$. Согласно (17), имеем

$$\begin{aligned} |R_j(x)| &\ll 2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |R_j(z)| &\ll 2^{t(1-r_1-l_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |R_j(w)|_p &\ll 2^{t(-s_1-m_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $2 \leq j \leq k$, $\deg R_j \leq n - [u_1]$ и $H(R) \leq 2^{t+2}$. Теперь многочлены $R_j(f) = b_{n-[u_1]}f^{n-[u_1]} + \dots + b_1f + b_0$ поделим на классы. Поделим значения коэффициентов $b_{n-[u_1]}, \dots, b_1$ многочленов $R_j(f)$ на интервалы длины $2^{t(1-h_1)}$, где $h_1 = \{u_1\}(n-[u_1])^{-1}$. Ясно, что существует 2^{th_1} интервалов для каждого коэффициента. Снова воспользуемся принципом ящиков Дирихле и получим, что существует $m \geq 2^{t(d-\varepsilon_2)}$ многочленов R_j в каждом таком интервале. Занумеруем многочлены $R_1, \dots, R_m$. Снова рассмотрим разность этих многочленов и определим многочлены $S_i(f) = R_{i+1}(f) - R_1(f)$, удовлетворяющие

$$\begin{aligned} |S_i(x)| &\ll 2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |S_i(z)| &\ll 2^{t(1-r_1-l_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |S_i(w)|_p &\ll 2^{t(-s_1-m_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $1 \leq i \leq m-1$, $\deg S_i \leq n - [u_1]$, $H(S_i) \ll 2^{t(1-h_1)}$. Коэффициент $b'_0(S_i)$ примет малые значения $\ll 2^{t(1-h_1)}$ автоматически из-за малости правых частей в системе (28).

Рассмотрим более детально многочлены S_i , необходимо рассмотреть три типа многочленов S_i . Отметим, что аналогичный аргумент будет использоваться при доказательстве предложения 6 и предложения 7.

Случай А. Все многочлены S_i имеют вид $i_1 S_0, i_2 S_0, \dots, i_{m-1} S_0$ для некоторого фиксированного многочлена S_0 . Тогда $i' = \max_{1 \leq j \leq m-1} |i_j| \gg 2^{t(d-\varepsilon_2)}$ и выполняется система неравенств (28) для $i' S_0$, где $H(S_0) \ll 2^{t(1-h_1-d+\varepsilon_2)}$. Из (28) получаем

$$|S_0(x)||S_0(z)|^2|S_0(w)|_p \ll 2^{t(3-d_1-d_2-3d+4(n-1)\varepsilon_1)}. \quad (29)$$

Из (25) и (26) имеем

$$d_1 + d_2 - 3 + 3d - 4(n-1)\varepsilon_1 > (n - [u_1] - 2)(1 - h_1 - d + \varepsilon_2).$$

Таким образом, согласно лемме 1 множество точек $\mathbf{u}$, удовлетворяющих (28) для бесконечного числа таких многочленов S , имеет меру нуль.

Случай Б. Один из многочленов S_i , $1 \leq i \leq m-1$ (скажем, S_1), является приводимым, то есть $S_1 = S_1^{(1)} S_1^{(2)}$. Из системы (28), получаем

$$|S_1(x)||S_1(z)|^2|S_1(w)|_p \ll 2^{t(3-d_1-d_2+4(n-1)\varepsilon_1)}.$$

Заметим, что $H(S_1) \asymp H(S_1^{(1)})H(S_1^{(2)})$. Тогда для одного из многочленов $S_1^{(1)}$ или $S_2^{(2)}$ выполняется неравенство

$$|S_1^{(i)}(x)||S_1^{(i)}(z)|^2|S_1^{(i)}(w)|_p \ll H(S_1^{(i)})^{3-d_1-d_2+4(n-1)\varepsilon_1}$$

и $\deg S_1^{(i)}(f) \leq n - [u_1] - 1$. Нетрудно показать, что неравенство

$$d_1 + d_2 - 3 - 4(n-1)\varepsilon_1 > (n - [u_1] - 3)(1 - h_1) \quad (30)$$

справедливо для $d = 0.23$ и достаточно малого числа $\varepsilon, \varepsilon_1$. Снова воспользуемся леммой 1 и получим, что множество точек, удовлетворяющих (28) для бесконечного числа таких многочленов S , имеет меру нуль.

Случай В. Все многочлены S_i являются неприводимыми и по крайней мере два из них, например, S_1 и S_2 , не имеют общих корней. Наша цель в данном случае – получить противоречие с леммой 5. Пусть $h = 1 - h_1$, перейдем к высоте многочленов S_i в (28) и (16) и определим

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (q_1 + k_2 T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_1 &= k_2 T^{-1} h^{-1}, \\ \tau_2 &= (r_1 + l_2 T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_2 &= l_2 T^{-1} h^{-1}, \\ \tau_3 &= (s_1 + m_2 T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_3 &= m_2 T^{-1} h^{-1}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 5, должно выполняться следующее неравенство

$$3q_1 + k_2 T^{-1} + 6r_1 + 2l_2 T^{-1} + 3s_1 + m_2 T^{-1} - 12(n-1)\varepsilon_1 - 9h_1 < 2(n - [u_1])h + \delta.$$

Поскольку $q_1 \geq k_2 T^{-1}$, $2r_1 \geq 2l_2 T^{-1}$ и $s_1 \geq m_2 T^{-1}$, то используя (26), получаем

$$2(d_1 + d_2) - 12(n - 1)\varepsilon_1 - \frac{9\{u_1\}}{n - [u_1]} < 2(d_1 + d_2) - 2 + 2d + \delta.$$

Последнее неравенство противоречиво при $d = 0.23$, $n - [u_1] \geq 6$ и достаточно малых δ и ε_1 . Следовательно, множество точек (x, z, w) , для которых неравенства выполняются для бесконечного числа таких многочленов S_i , удовлетворяющих $n - [u_1] \geq 6$, имеет меру нуль.

Осталось доказать справедливость результата для $n - [u_1] = 4$ или 5. Пусть $p = n - [u_1]$. Вернемся к многочленам R_j , удовлетворяющим (27). Первое неравенство системы (27) выполняется для каждого многочлена R_j на интервале I_M , где $M = I_M \times K_M \times D_M$. Поскольку $R_j = P_j - P_1$, разложим производные $P_j^{(i)}(x)$ для каждого многочлена P_j , $j = 1, \dots, k$, в ряд Тейлора на I_M . Пусть α_{1j} — соответствующий корень многочлена P_j . Тогда

$$P_j^{(i)}(x) = P_j^{(i)}(\alpha_{1j}) + P_j^{(i+1)}(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j}) + \frac{1}{2}P_j^{(i+2)}(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j})^2 + \dots$$

и по лемме 4

$$\begin{aligned} |P_j^{(i)}(\alpha_{1j})| &\ll 2^{t(1-q_i+(n-i)\varepsilon_1)}, \\ |P_j^{(i+i_1)}(\alpha_{1j})||x - \alpha_{1j}|^{i_1} &\ll 2^{t(1-q_{i+i_1}+(n-i-i_1)\varepsilon_1-i_1k_2T^{-1})} \ll 2^{t(1-q_i+(n-i-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned}$$

$2 \leq i_1 \leq p - i$, что означает

$$|P_j^{(i)}(x)| \ll 2^{t(1-q_i+(n-1)\varepsilon_1)}, \quad 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq k$$

на I_M . Последнее позволяет получить, что

$$|R_j^{(i)}(x)| \ll 2^{t(1-q_i+(n-1)\varepsilon_1)}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

на I_M .

Пусть x_0 — центр интервала I_M . Каждый диапазон значений многочлена R_j и его производной в точке x_0 разделим на 2^{tv} интервалов, где $v = \{u_1\}(p+1)^{-1}$. Из (27) следует, что интервал $[-c(n)2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, c(n)2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}]$ делится на 2^{tv} интервалов одинаковой длины $c(n)2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-v)}$, и диапазон значений l -ой производной ($1 \leq l \leq p$) вида

$$[-c(n)2^{t(1-q_l+(n-1)\varepsilon_1)}, c(n)2^{t(1-q_l+(n-1)\varepsilon_1)}]$$

делится на интервалы длины $c(n)2^{t(1-q_l+(n-1)\varepsilon_1-v)}$. В результате, существует не более $c(n)2^{t(p+1)v}$ различных комбинаций малых интервалов. Используя принцип ящиков Дирихле, получаем, что существует как минимум $2^{t(d-\varepsilon_2)}$ многочленов R_j , принадлежащих некоторой фиксированной комбинации интервалов, где $\varepsilon_2 > 0$.

Ясно, что для каждой точки $x \in I_M$ многочлены $T_j(x) = R_{j+1}(x) - R_1(x)$, где R_{j+1} и R_1 принадлежат одной и той же комбинации интервалов, удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} T_j(x_0) &= |R_{j+1}(x_0) - R_1(x_0)| \ll 2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})} \\ T_j^{(i)}(x_0) &= |R_{j+1}^{(i)}(x_0) - R_1^{(i)}(x_0)| \ll 2^{t(1-q_i+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})}, \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq p$. Разложим многочлен T_j в ряд Тейлора на I_M в окрестности точки x_0 :

$$T_j(x) = \sum_{i=0}^p (i!)^{-1} T_j^{(i)}(x_0) (x - x_0)^i.$$

Используя вышеприведенные оценки и (10), получаем

$$\begin{aligned} |T_j^{(i)}(x)| |x - x_0|^i &\ll 2^{t(1-q_i-ik_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})} \\ &\ll 2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|T_j(x)| \ll 2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})} \quad (31)$$

для $1 \leq j \leq m-1$, $m \geq 2^{t(d-\varepsilon_2)}$, и $x \in I_M$.

Как и ранее в этом предложении, необходимо рассмотреть три случая (аналогично случаям A , B и C для многочленов T_j). Поэтому ниже некоторые детали будут опущены.

Случай А. Все многочлены T_j имеют вид sT_0 , для некоторого многочлена T_0 . Следовательно, существует такое число s , что $|s| \gg 2^{t(d-\varepsilon_2)}$ (так как существует не менее $2^{t(d-\varepsilon_2)}$ многочленов T_j) и $H(T_0) \leq 2^{t(1-d+\varepsilon_2)}$, а также выполняется система неравенств

$$\begin{aligned} |T_0(x)| &\ll H(T_0)^{(1-q_1-k_2T^{-1}-d+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})(1-d+\varepsilon_2)^{-1}} \\ |T_0(z)| &\ll H(T_0)^{(1-r_1-l_2T^{-1}-d+(n-1)\varepsilon_1)(1-d+\varepsilon_2)^{-1}} \\ |T_0(w)|_p &\ll H(T_0)^{(-s_1-m_2T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)(1-d+\varepsilon_2)^{-1}}. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство следует из (31), а два других получаются из (27). Далее неравенство

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 - 3 + \{u_1\}(p+1)^{-1} + 3d - 4(n-1)\varepsilon_1 &> (n - [u_1] - 2)(1 - d + \varepsilon_2) = \\ &= (d_1 + d_2 - 3 + d + \{u_1\})(1 - d + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

выполняется для $n - [u_1] \leq 5$, $d = 0.23$, и достаточно малых ε , ε_1 , ε_2 . Следовательно, используя лемму 1, получаем, что множество точек, удовлетворяющих системе выше для бесконечного числа таких многочленов T , имеет меру нуль.

Случай Б. Все многочлены T_j приводимы. Если для каждого многочлена T_j существует делитель $T_j^{(k)}$ степени $\leq n - [u_1] - 2$ и удовлетворяющий неравенству (воспользуемся (27) и (31))

$$\begin{aligned} & |T_j^{(k)}(x)| |T_j^{(k)}(z)|^2 |T_j^{(k)}(w)|_p \ll \\ & \ll 2^{t(1-q_1-k_2T^{-1}-\{u_1\}(p+1)^{-1}+2(1-r_1-l_2T^{-1})-s_1-m_2T^{-1}+4(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned}$$

то как и выше лемма 1 будет применена непосредственно к многочленам $T_j^{(k)}$.

С другой стороны, каждый многочлен T_j является произведением линейного множителя и множителя степени $n - [u_1] - 1$. Если линейные множители одинаковы для двух многочленов, то есть $T_1 = T_0T'_1$ и $T_2 = T_0T'_2$, то многочлены T'_1 и T'_2 не имеют общих корней, и противоречие с леммой 5 может быть получено. Следовательно, далее мы предполагаем, что все линейные множители различны, поэтому существует многочлен T_j с линейным множителем высоты не менее $2^{t(\frac{d-\varepsilon_2}{2})}$ (так как число различных многочленов T_j не менее $2^{t(d-\varepsilon_2)}$). В силу того, что $|\operatorname{Im} z| > \delta_1$, имеем $|az + b|^2 \gg a^2$. Используя прямой подсчет мер множеств, получаем, что множество точек (x, z, w) , удовлетворяющих $|ax + b||az + b|^2|aw + b|_p \ll 2^{-t\varepsilon_1}$, имеет меру нуль. Следовательно, мы можем предположить, что для линейного множителя $T_0(f) = af + b$, где $|a| > 2^{t(d-\varepsilon_2)/2}$, выполняется неравенство

$$|ax + b||az + b|^2|aw + b|_p \gg 2^{-t\varepsilon_1}$$

для любого ε_1 . Пусть $T_j = T_0t_j$. Тогда высота многочлена t_j не более $2^{t(1-(d-\varepsilon_2)/2)}$ и t_j удовлетворяет неравенству (в силу (27), (31) и предыдущего неравенства)

$$\begin{aligned} & |t_j(x)| |t_j(z)|^2 |t_j(w)|_p \ll \\ & \ll H(t_j)^{(1-q_1-k_2T^{-1}-\{u_1\}(p+1)^{-1}+2(1-r_1-l_2T^{-1})-s_1-m_2T^{-1}+4n\varepsilon_1)(1-(d-\varepsilon_2)/2)^{-1}}. \end{aligned}$$

Для $p \leq 5$ и достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$ имеем

$$d_1 + d_2 - 3 + \{u_1\}(p+1)^{-1} - 4n\varepsilon_1 > (d_1 + d_2 - 4 + d + \{u_1\})(1 - (d - \varepsilon_2)/2).$$

Таким образом, в силу леммы 1, получаем, что множество точек, для которых существует бесконечное число таких многочленов T , имеет меру нуль.

Случай В. Существует пара многочленов T_1 и T_2 без общих корней. Второе и третье неравенства системы (27) оставляем без изменения и первое неравенство заменяем неравенством (31). Определим числа $\tau_1 = q_1 + k_2T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1 + \{u_1\}(p+1)^{-1}$, $\tau_2 = r_1 + l_2T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1$ и $\tau_3 = s_1 + m_2T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1$. Тогда в силу леммы 5, справедливо неравенство

$$3q_1 + k_2T^{-1} + 6r_1 + 2l_2T^{-1} + 3s_1 + m_2T^{-1} - 12(n-1)\varepsilon_1 + \frac{3\{u_1\}}{p+1} < 2(n - [u_1]) + \delta.$$

Однако, так как $q_1 \geq k_2 T^{-1}$, $r_1 \geq l_2 T^{-1}$, $s_1 \geq m_2 T^{-1}$, то для $d = 0.23$, $p \leq 5$ и достаточно малых величин ε_1 и δ последнее неравенство противоречиво. Доказательство предложения 4 закончено.

Объединяя первые четыре предложения, получаем, что $\mu(L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

Случай 2: $(1, 1, 1)$ -линейность. Предположим, что выполняется следующая система

$$\begin{aligned} q_1 + k_2 T^{-1} &\geq 1 + v_1 + \lambda_1, \\ r_1 + l_2 T^{-1} &\geq 1 + v_2 + \lambda_2, \\ s_1 + m_2 T^{-1} &\geq v_3 + \lambda_3, \end{aligned} \quad (32)$$

одновременно с системой (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, то $\mu(L_n^{(1,1,1)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся системой (5) и леммой 3 и получим

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &\ll \min_{2 \leq j \leq n} 2^{-t \left(\frac{v_1 + \lambda_1 + 1 - q_j}{j} \right)} = 2^{-t\mu_1}, \\ |z - \beta_1| &\ll \min_{2 \leq j \leq n} 2^{-t \left(\frac{v_2 + \lambda_2 + 1 - r_j}{j} \right)} = 2^{-t\mu_2}, \\ |w - \gamma_1|_p &\ll \min_{2 \leq j \leq n} 2^{-t \left(\frac{v_3 + \lambda_3 - s_j}{j} \right)} = 2^{-t\mu_3}. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя (32), нетрудно показать, что $\mu_1 > v_1 + \lambda_1 + 1 - q_1$. Пусть минимум в первом неравенстве в (33) достигается при j_1 , во втором – при j_2 , в третьем – при j_3 . Система неравенств (33) определяет некоторый параллелепипед $\sigma_5(P)$. Множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(1,1,1)}$, где $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$, обозначим $\mathcal{P}_5^t$. Пусть $A_t = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_5^t} \sigma_5(P)$.

Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t(\mu_1 - \gamma)}$, $2^{-t\mu_2}$, $2^{-t\mu_3}$, где $\gamma = (10n)^{-1}$. Предположим, что P принадлежит M и разложим P на M в ряд Тейлора. Как и ранее, оценим сверху все члены разложения. Приведем оценки для действительной переменной. Используя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)| |x - \alpha_1| &\ll 2^{t\gamma} |P'(\alpha_1) 2^{-t\mu_1}| \ll 2^{t(\gamma + 1 - q_1 + (n-1)\varepsilon_1 - v_1 - \lambda_1 - 1 + q_1)} \\ &\ll 2^{t(-v_1 - \lambda_1 + n\gamma + (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P^{(j)}(\alpha_1)| |x - \alpha_1|^{(j)} &\ll 2^{jt\gamma} |P^{(j)}(\alpha_1) 2^{-jt\mu_1}| \ll 2^{t(j\gamma + 1 - q_j + (n-j)\varepsilon_1 - v_1 - \lambda_1 - 1 + q_j)} \\ &\ll 2^{t(-v_1 - \lambda_1 + n\gamma + (n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned}$$

для $2 \leq j \leq n$.

Аналогично оценим сверху значения $|P(z)|$, $|P(w)|_p$ и получим

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll 2^{-t(v_1 + \lambda_1 - 0.1 - (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(z)| &\ll 2^{-t(v_2 + \lambda_2 - (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(w)|_p &\ll 2^{-t(v_3 + \lambda_3 - (n-1)\varepsilon_1)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим параллелепипеды M , каждому из которых принадлежит два и более многочлена P_1 и P_2 (напомним, что мы можем предположить, что P_1 и P_2 неприводимы). Для обоих многочленов справедлива система неравенств (34), и они не имеют общих корней. Мы намерены получить противоречие с леммой 5, для этого определим

$$\begin{aligned}\tau_1 &= v_1 + \lambda_1 - 0.1 - (n-1)\varepsilon_1, & \eta_1 &= \frac{v_1 + \lambda_1 + 1 - q_{j_1}}{j_1} - \gamma, \\ \tau_2 &= v_2 + \lambda_2 - (n-1)\varepsilon_1, & \eta_2 &= \frac{v_2 + \lambda_2 + 1 - r_{j_2}}{j_2}, \\ \tau_3 &= v_3 + \lambda_3 - (n-1)\varepsilon_1, & \eta_3 &= \frac{v_3 + \lambda_3 - s_{j_3}}{j_3}.\end{aligned}$$

Тогда, применяя лемму 5 и выбирая $j_1 = j_2 = j_3 = 2$ (это наихудший случай), имеем

$$2v_1 + 2\lambda_1 - 0.3 + 2\gamma + 4v_2 + 4\lambda_1 + 2v_3 + 2\lambda_3 - 12(n-1)\varepsilon_1 + 6 + (q_{j_1} + 2r_{j_2} + s_{j_3}) - 3 < 2n + \delta,$$

поэтому

$$\delta > 2\gamma + 0.7 - 12(n-1)\varepsilon_1 + (q_{j_1} + 2r_{j_2} + s_{j_3}).$$

Последнее неравенство при малом δ и достаточно малом ε_1 противоречиво. Таким образом, не существует параллелепипедов M , содержащих два и более неприводимых многочлена.

Следовательно, мы можем предположить, что не более одного многочлена $P \in \mathcal{P}_5^t$ принадлежит каждому параллелепипеду M . Число таких параллелепипедов равно $c(n)2^{t(\mu_1+2\mu_2+\mu_3-\gamma)}$. Используя (33), находим

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(\mu_1+2\mu_2+\mu_3-\mu_1-2\mu_2-\mu_3+\gamma)} \ll 2^{-t\gamma}.$$

В силу того, что $L_n^{(1,1,1)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ – множество точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_t , и $\sum_{t=0}^{\infty} \mu(A_t) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t\gamma} < \infty$, то снова обращаемся к лемме Бореля-Кантелли, и этого достаточно, чтобы завершить доказательство.

Случай 3: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ –линейность.

Рассмотрим только случай $(1, 0, 0)$ –линейности, так как доказательство в двух других случаях аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, то $\mu(L_n^{(1,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $(1, 0, 0)$ –линейности означает, что вместе с системой (5) выполняется система неравенств

$$\begin{aligned}q_1 + k_2 T^{-1} &\geq 1 + v_1 + \lambda_1, \\ r_1 + l_2 T^{-1} &< 1 + v_2 + \lambda_2, \\ s_1 + m_2 T^{-1} &< v_3 + \lambda_3.\end{aligned}\tag{35}$$

Сначала заменим два последних неравенства в (35) на следующие неравенства

$$\begin{aligned} 0.9 + v_2 + \lambda_2 &< r_1 + l_2 T^{-1} < 1 + v_2 + \lambda_2, \\ -0.1 + v_3 + \lambda_3 &< s_1 + m_2 T^{-1} < v_3 + \lambda_3. \end{aligned} \quad (36)$$

Далее следуем схеме доказательства предложения 5. Поделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-t(l_2 T^{-1} - \varepsilon_1)}$ и $2^{-t(m_2 T^{-1} - \varepsilon_1)}$, где $\mu_1 = \max_{2 \leq j \leq n} (v_1 + \lambda_1 + 1 - q_j)j^{-1}$ и пусть максимум достигается при $j = j_1$.

Рассмотрим сначала такие параллелепипеды M , которым принадлежит не менее двух многочленов. Разложим эти многочлены в ряд Тейлора на M и оценим сверху каждый член разложения. В силу того, что многочлены неприводимы и не имеют общих корней, то можем применить лемму 5. В силу (36) получаем противоречие (аналогично как и в предложении 5).

Следовательно, осталось рассмотреть случай, когда не более одного многочлена принадлежит каждому параллелепипеду M . Множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(1,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$, удовлетворяющих (35) и (36) обозначим $\mathcal{P}_6^t$. Пусть $\sigma(P)$ – множество точек $\mathbf{u}$, для которых система (5) выполняется. Пусть $A_t = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_6^t} \sigma(P)$. Для фиксированного многочлена $P \in \mathcal{P}_6^t$ мера точек $\mathbf{u}$, для которых выполняется (5), оценивается как $c(n)2^{t(-\mu_1 - (2v_2 + 2\lambda_2 + 2 - 2r_1) - (v_3 + \lambda_3 - s_1))}$. Число параллелепипедов M не превосходит $2^{t(\mu_1 + (2l_2 + m_2)T^{-1} - 3\varepsilon_1)}$. Следовательно, используя (35) и вышеприведенные оценки, получаем

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(2v_2 + 2\lambda_2 + 2 - 2(r_1 + l_2 T^{-1}) + v_3 + \lambda_3 - (s_1 + m_2 T^{-1}) + 3\varepsilon_1)} \ll 2^{-3\varepsilon_1 t}.$$

В силу того, что $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-3\varepsilon_1 t} < \infty$, множество точек, удовлетворяющих (5), (35) и (36) бесконечно часто, имеет меру нуль по лемме Бореля-Кантелли.

Далее исследуем случай, когда выполняется одно из двух следующих неравенств или оба неравенства

$$\begin{aligned} r_1 + l_2 T^{-1} &\leq 0.9 + v_2 + \lambda_2, \\ s_1 + m_2 T^{-1} &\leq -0.1 + v_3 + \lambda_3. \end{aligned} \quad (37)$$

Эти случаи аналогичны, поэтому продемонстрируем доказательство, например, для случая, когда выполняются оба неравенства. Обозначим множество многочленов $\mathcal{P}_n^{(1,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$, удовлетворяющих (35) и (37), через $\mathcal{P}_7^t$. Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-tl_2 T^{-1}}$ и $2^{-tm_2 T^{-1}}$. Зафиксируем $u = n - v_1 - \lambda_1 - (2r_1 + s_1) - (2l_2 + m_2)T^{-1}$, и пусть $\theta = u - \varepsilon_2$ для некоторой достаточно малой величины ε_2 . Предположим, что параллелепипеду M принадлежит не более 2^{θ} многочленов. Пусть $A_t = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_7^t} \sigma(P)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(A_t) &\ll 2^{-t(\mu_1 + 2(v_2 + \lambda_2 + 1 - r_1) + (v_3 + \lambda_3 - s_1) - \mu_1 - 2l_2 T^{-1} - m_2 T^{-1} - \theta)} \\ &\ll 2^{-t(u - \theta)} \ll 2^{-t\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Ясно, что ряд $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t\varepsilon_2}$ сходится и применение леммы Бореля-Кантелли завершает доказательство.

Далее предположим, что существует параллелепипед M , которому принадлежит не менее $2^{2\theta}$ многочленов. Пусть $u = u_1 + d$, где $0 < d < 1$. Вычислим

$$n - [u_1] = n - u + \{u_1\} + d = v_1 + \lambda_1 + d'_1 + d'_2 + \{u_1\} + d$$

и

$$n - u_1 = v_1 + \lambda_1 + d'_1 + d'_2 + d,$$

где $d'_1 = 2r_1 + s_1$ и $d'_2 = (2l_2 + m_2)T^{-1}$. (Использовали факт, что $n - 2 = v_1 + 2v_2 + v_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$.) Используя формулу Тейлора и (35), получаем

$$|P(x)| \ll 2^{-t(v_1 + \lambda_1 - (n-1)\varepsilon_1)}.$$

Заменим первое неравенство (17) предыдущим неравенством и получим систему

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll 2^{-t(v_1 + \lambda_1 - (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(z)| &\ll 2^{-t(r_1 + l_2 T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(w)|_p &\ll 2^{-t(s_1 + m_2 T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

Далее проведем доказательство, аналогичное доказательству предложения 4, заменив систему (17) вышеприведенной системой. Рассмотрим многочлены $R_j(f) = P_j(f) - P_1(f)$, $2 \leq j \leq k$, $k \geq c(n)2^{t(\{u_1\} + d - \varepsilon_2)}$, у которых совпадают первые $[u_1]$ старших коэффициентов. Далее уменьшим высоту многочленов R_j за счет $\{u_1\}$, то есть каждый коэффициент R_j будет лежать в интервале длины $2^{t(1-h_1)}$, где $h = \{u_1\}(n - [u_1])^{-1}$. Перенумеруем многочлены R_j и затем рассмотрим многочлены $S_i = R_{i+1} - R_1$. Перейдем от высоты многочлена P к высоте многочленов S_i , $1 \leq i \leq m - 1$, $m \geq 2^{t(d - \varepsilon_2)}$, тогда следующие неравенства

$$\begin{aligned} |S_i(x)| &\ll 2^{-t(v_1 + \lambda_1 - (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |S_i(z)| &\ll 2^{-t(r_1 + l_2 T^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |S_i(w)|_p &\ll 2^{-t(s_1 + m_2 T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned} \tag{38}$$

справедливы на M , где $\deg S_i \leq n - [u_1]$, $H(S_i) \ll 2^{t(1-h_1)}$.

Далее, как и при доказательстве предложения 4, рассмотрим три случая.

Случай А. Вместо неравенства (29) получим

$$\begin{aligned} |S_0(x)| |S_0(z)|^2 |S_0(w)|_p &\ll 2^{t(-v_1 - \lambda_1 - 2r_1 - 2l_2 T^{-1} + 2 - s_1 - m_2 T^{-1} - 3d + 4(n-1)\varepsilon_1)} \\ &\ll 2^{-t(v_1 + \lambda_1 + d'_1 + d'_2 - 2 - 4(n-1)\varepsilon_1 + 3d)}. \end{aligned}$$

Чтобы применить лемму 1 надо доказать неравенство

$$v_1 + \lambda_1 + d'_1 + d'_2 - 2 - 4(n-1)\varepsilon_1 + 3d > (n - [u_1] - 2)(1 - d - h_1 + \varepsilon_2).$$

Нетрудно показать, что для $n - [u_1] \geq 3$, $d = 0.23$ и достаточно малых величин ε_1 , ε_2 последнее неравенство справедливо. Условие $n - [u_1] \geq 3$ следует из (38), поскольку каждый многочлен, удовлетворяющий (38), должен иметь действительный и два комплексно-сопряженных корня.

Случай Б. Когда среди многочленов S_i есть приводимые, то снова можно применить лемму 1, если верно неравенство

$$v_1 + \lambda_1 + d'_1 + d'_2 - 2 - 4(n-1)\varepsilon_1 > (n - [u_1] - 3)(1 - h_1),$$

аналогичное неравенству (30). В силу леммы 5, для $n - [u_1] - 1 \geq 3$, $d = 0.23$ и достаточно малого ε_1 вышеприведенное неравенство выполняется.

Случай В. Если существует два многочлена S_1 и S_2 , не имеющих общих корней, то применим лемму 5. Здесь

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (v_1 + \lambda_1 - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_1 &= \mu_1 h^{-1}, \\ \tau_2 &= (r_1 + l_2 T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1 - 1)h^{-1}, & \eta_2 &= l_2 T^{-1} h^{-1}, \\ \tau_3 &= (s_1 + m_2 T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_3 &= m_2 T^{-1} h^{-1}. \end{aligned}$$

Получим неравенство

$$\begin{aligned} &2v_1 + 2\lambda_1 + 2 + 6r_1 + 2l_2 T^{-1} + 3s_1 + m_2 T^{-1} - 12(n-1)\varepsilon_1 + q_2(S) - \frac{9\{u_1\}}{n - [u_1]} \\ &< 2(n - [u_1]) \left(1 - \frac{\{u_1\}}{n - [u_1]} \right) + \delta = 2(v_1 + \lambda_1 + d'_1 + d'_2 + d) + \delta, \end{aligned}$$

наиболее слабая форма которого получается при $j_1 = 2$. Аналогично, как при доказательстве предложения 4, мы получаем доказательство в случае $n - [u_1] \geq 6$. Если же $n - [u_1] = 4$ или $n - [u_1] = 5$, то усиливая аппроксимацию по переменной x , как в предложении 4, мы завершаем доказательство.

Случай 4: $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$ -линейность.

Доказательство этих трех случаев аналогично, поэтому проведем его только для случая $(1, 0, 1)$ -линейности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, то $\mu(L_n^{(1,0,1)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $(1, 0, 1)$ -линейности означает, что вместе с системой неравенств (5) выполняется система

$$\begin{aligned} q_1 + k_2 T^{-1} &\geq 1 + v_1 + \lambda_1, \\ r_1 + l_2 T^{-1} &< 1 + v_2 + \lambda_2, \\ s_1 + m_2 T^{-1} &\geq v_3 + \lambda_3. \end{aligned} \tag{39}$$

Вначале введем дополнительное ограничение, добавив к системе (39) условие

$$0.7 + v_2 + \lambda_2 < r_1 + l_2 T^{-1}. \tag{40}$$

Определим

$$\mu_1 = \max_{2 \leq j \leq n} ((1 + v_1 + \lambda_1 - q_j)j^{-1})^{1/j}$$

и

$$\mu_3 = \max_{2 \leq j \leq n} ((v_3 + \lambda_3 - s_j)j^{-1})^{1/j},$$

и пусть максимальные значения достигаются при j_1 и j_3 соответственно. Доказательство этого предложения следует из доказательств предложений 4, 5, 6 с небольшими изменениями. Множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(1,0,1)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$, удовлетворяющих (39) и (40), обозначим $\mathcal{P}_8^t$. Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-t(l_2T^{-1}-\varepsilon_1)}$ и $2^{-t\mu_3}$.

Следуя предложению 5, предположим, что существует параллелепипед M , содержащий два и более многочленов. Разложим их в ряд Тейлора и получим оценки сверху для каждого члена разложения. В силу того, что многочлены неприводимы, не имеют общих корней, то можно применить лемму 5. Вместе с условием (40) это приведет к противоречию. Таким образом, мы можем предположить, что не более одного многочлена принадлежат каждому параллелепипеду M . Тогда

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(\mu_1+2v_2+2\lambda_2+2-2r_1+\mu_3-\mu_1-\mu_3-2l_2T^{-1}-2\varepsilon_1)} \ll 2^{-2t\varepsilon_1}.$$

Снова получаем $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$, и доказательство завершается в данном случае, применяя лемму Бореля-Кантелли.

Далее в системе неравенств (39) заменим второе неравенство на следующее

$$r_1 + l_2T^{-1} \leq 0.7 + v_2 + \lambda_2. \quad (41)$$

Обозначим множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(1,0,1)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$, удовлетворяющих (39) и (41), через $\mathcal{P}_9^t$. Пусть $A_t = \cup_{P \in \mathcal{P}_9^t} \sigma(P)$.

Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-tl_2T^{-1}}$ и $2^{-t\mu_3}$. Зафиксируем $u = 2(v_2 + \lambda_2 + 1 - r_1 - l_2T^{-1})$ и $\theta = u - \varepsilon_2$ для достаточно малой величины $\varepsilon_2 > 0$. Рассмотрим те параллелепипеды M , которым принадлежит не более $2^{t\theta}$ многочленов. Тогда

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(\mu_1+\mu_3+2v_2+2\lambda_2+2-2r_1-\mu_1-\mu_3-2l_2T^{-1}+\theta)} \ll 2^{-t(u-\theta)} \ll 2^{-t\varepsilon_2}.$$

Получаем $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$, поэтому мера точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_t , имеет меру нуль согласно лемме Бореля-Кантелли.

Далее рассмотрим параллелепипеды M , которым принадлежит не менее $2^{t\theta}$ многочленов. Пусть $u = u_1 + d$, где $0 < d < 1$, и предположим, что P принадлежит M . Разложив многочлен P в ряд Тейлора на M и оценив сверху каждый член разложения, получим

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2T^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(w)|_p &\ll 2^{-t(v_3+\lambda_3-(n-1)\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

Снова следуем схеме доказательства предложения 6, используя вышеприведенную систему вместо (17). От многочленов P перейдем к многочленам $R_j = P_j - P_1$, $2 \leq j \leq k$, $k \geq 2^{t(d+\{u_1\}-\varepsilon_2)}$, затем перенумеруем многочлены R_j и перейдем к многочленам $S_i = R_{i+1} - R_1$, $1 \leq i \leq m-1$, $m \geq 2^{t(d-\varepsilon_2)}$, как в (27) и (28). Получим

$$\begin{aligned} |S_i(x)| &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}}, \\ |S_i(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2T^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}}, \\ |S_i(w)|_p &\ll 2^{-t(v_3+\lambda_3-(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned}$$

где $\deg S_i \leq n - [u_1]$ и $H(S_i) \ll 2^{t(1-h_1)}$.

Вновь рассмотрим три случая.

Случай А. Во-первых, от системы перейдем к неравенству

$$|S_0(x)||S_0(z)|^2|S_0(w)|_p \ll 2^{-t(v_1+v_3+\lambda_1+\lambda_3+2r_1+2l_2T^{-1})-2-4(n-1)\varepsilon_1},$$

полученному таким же способом, как и (29). Аналогично тому, как была показана справедливость неравенства (30), доказывается справедливость неравенства $v_1 + v_3 + \lambda_1 + \lambda_3 + 2r_1 + 2l_2T^{-1} - 2 - 4(n-1)\varepsilon_1 + 3d > (n - [u_1] - 2)(1 - d - h_1)$ для $d = 0.23$ и достаточно малых величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Таким образом, применима лемма 1.

Случай Б. Далее предположим, что существуют приводимые многочлены среди многочленов S_i . Тогда справедливо неравенство

$$v_1 + v_3 + \lambda_1 + \lambda_3 + 2r_1 + 2l_2T^{-1} - 2 - 4(n-1)\varepsilon > (n - [u_1] - 3)(1 - h_1)$$

для $d = 0.23$ и достаточно малого ε_1 . Доказательство последнего неравенства совпадает с доказательством неравенства (30), и далее снова применяем лемму 1.

Случай В. Применим лемму 5 к двум многочленам S_1 и S_2 , не имеющим общих корней. Пусть

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (v_1 + \lambda_1 - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_1 &= \mu_1h^{-1}, \\ \tau_2 &= (r_1 + l_2T^{-1} - (n-1)\varepsilon_1 - 1)h^{-1}, & \eta_2 &= l_2T^{-1}h^{-1}, \\ \tau_3 &= (v_3 + \lambda_3 - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_3 &= \mu_3h^{-1}. \end{aligned}$$

Наиболее слабая форма неравенства в лемме 5 получается при $j_1 = j_3 = 2$ и имеет вид

$$\begin{aligned} 2v_1 + 2\lambda_1 + 2v_3 + 2\lambda_3 + 2 + 6r_1 + 2l_2T^{-1} + q_2(S) + s_2(S) - 12(n-1)\varepsilon_1 - \frac{9\{u_1\}}{n - [u_1]} \\ < 2(v_1 + \lambda_1 + v_3 + \lambda_3 + 2r_1 + 2l_2T^{-1} + d) + \delta. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречиво при $d = 0.23$, $n - [u_1] \geq 6$ и достаточно малых δ и ε_1 . Доказательство в случае $n - [u_1] = 4$ и $n - [u_1] = 5$ проводится отдельно и аналогично как в предложении 4. Предложение 7 доказано.

Объединяя все предложения, получаем доказательство теоремы для случая $k = l = m = 1$.

4 Общий случай

В данном разделе укажем какие изменения надо провести в общем случае. Удалим из пространства $\mathbf{T}$ множество малой меры так, чтобы в оставшейся части выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} |x_{i_1} - x_{j_1}| &\geq \delta_1, & 1 \leq i_1 < j_1 \leq k, \\ |z_{i_2} - z_{j_2}| &\geq \delta_1, & 1 \leq i_2 < j_2 \leq l, \\ |Im z_t| &\geq \delta_1, & 1 \leq t \leq l, \\ |w_{i_3} - w_{j_3}|_p &\geq \delta_1, & 1 \leq i_3 < j_3 \leq m. \end{aligned}$$

Это приведет к тому, что при достаточно большом $H(P)$ будут выполняться следующие неравенства для корней многочлена P :

$$\begin{aligned} |\alpha_{i_1} - \alpha_{j_1}| &> c(\delta_1), & 1 \leq i_1 < j_1 \leq n, \\ |\gamma_{i_2} - \gamma_{j_2}|_p &> c(\delta_1), & 1 \leq i_2 < j_2 \leq n, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{Q}_p^*$.

При $n = k + 2l$ первоначальная система неравенств легко анализируется; этот случай соответствует случаю $n = 3$ при условии $k = l = m = 1$. Все действительные и комплексные корни удалены друг от друга, и значения модулей производных в соответствующих корнях многочленов принимают максимальные по порядку значения. Это приводит к получению наилучших оценок сверху для $|x_i - \alpha_i|$ и $|z_j - \beta_j|$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$. Оставшиеся неравенства для p -адических переменных анализируются как в работе [5].

В теореме, в зависимости от соотношений между порядком аппроксимации по каждой переменной и величиной производной в ближайшем корне возникает 2^{k+2l+m} типов линейности. Наиболее принципиальными из них являются два случая: $(1, 1, \dots, 1)$ -линейность и $(0, 0, \dots, 0)$ -линейность. В первом случае доказательство проводится аналогично случаю $(1, 1, 1)$ -линейности. Во втором случае по каждой переменной проводим расширение первоначальных параллелепипедов $\sigma(P)$ до параллелепипедов $\sigma_1(P)$, на которых уже происходит совпадение порядка аппроксимации и показателя степени производной в ближайшем корне. Если внутри расширенного параллелепипеда оказывается небольшое количество многочленов, то завершение доказательства происходит простым подсчетом мер. Если же число многочленов велико, то по принципу Дирихле у этих многочленов должны совпадать несколько старших коэффициентов. Разложим все многочлены в ряд Тейлора в окрестности корней на расширенных параллелепипедах и оценим их сверху. Далее выделим из совокупности многочленов один многочлен и рассмотрим новые многочлены, образованные разностями оставшихся многочленов и выделенного многочлена. В итоге получим многочлены меньшей степени, которые с заданным новым порядком аппроксимируют нуль. Если среди них окажутся два неприводимых многочлена без общих корней, то воспользуемся леммой 5 и получим противоречие. С приводимыми многочленами или многочленами специального вида поступим также как в случае А и Б в предложении 4.

В случаях "смешанных" линейностей поступаем следующим образом: если координата в векторе линейности равна 1, то первоначальные неравенства остаются без изменений по данной переменной; если же координата равна 0, то по соответствующей переменной проводим расширение первоначального параллелепипеда до параллелепипеда, на котором совпадают порядок аппроксимации и порядок производной в ближайшем корне. Затем по переменным (соответствующим координате 0) разложим многочлены в ряд Тейлора и произведем оценки модулей и p -адических норм многочленов. Далее все зависит от количества многочленов, попавших в расширенный параллелепипед. Если количество невелико, то проводим непосредственный подсчет. При большом количестве многочленов в параллелепипеде снова применяем принцип Дирихле и далее поступаем как в случае $(0, 0, \dots, 0)$ -линейности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Baker, On a theorem of Sprindzuk // Proc. Roy. Soc., London Ser. A **292** (1966) 92–104.
- [2] V. Beresnevich, On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. **90** (1999) 97–112.
- [3] V. BERESNEVICH, A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungar., 94 (2002), pp. 99–130.
- [4] V. V. BERESNEVICH, V. I. BERNIK, D. Y. KLEINBOCK, G. A. MARGULIS, Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for non-degenerate manifolds // Mosc. Math. J., 2 (2002), pp. 203–225.
- [5] V. Beresnevich, V. Bernik and E. Kovalevskaya, On approximation of p -adic numbers by p -adic algebraic numbers // Journal of Number Theory, **111** (2005) 33–56.
- [6] V. BERESNEVICH, D. DICKINSON, S. VELANI, Measure theoretic laws for lim sup sets // Mem. Amer. Math. Soc. 179 (2006), x+91.
- [7] V. Bernik, The metric theorem on the simultaneous approximation of zero by values of integral polynomials // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **44** (1980) 24–45.
- [8] V. Bernik, On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials // Acta Arith. **53** (1989) 17–28.
- [9] V. Bernik and D. Vasilyev, A Khinchin-type theorem for integral-valued polynomials of a complex variable // Proc. IM NAN Belarus, **3** (1999) 10–20.

- [10] V. I. BERNIK, D. KLEINBOCK, G. A. MARGULIS, Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions, *Internat. Math. Res. Notices*, (2001), 453–486.
- [11] V. Bernik and N. Kalosha, Approximation of zero by values of integral polynomials in space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // *Vesti NAN of Belarus. Ser. fiz-mat nauk*, **1** (2004) 121–123.
- [12] V. BERNIK, N. SHAMUKOVA, Approximation of real numbers by integer algebraic numbers, and the Khinchin theorem // *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi.*, 50 (2006), no. 3, pp. 30–32.
- [13] Y. BUGEAUD, Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension // *J. Lond. Math. Soc.*, 65 (2002), pp. 547–559.
- [14] A. Khintchine, Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // *Math. Ann.* **92** (1924) 115–125.
- [15] E. Kovalevskaya, On the exact order of approximation to zero by values of integral polynomials in $\mathbb{Q}_p$ // *Preprint Institute Math. National Academy Sciences Belarus* **8 (547)**, Minsk 1998.
- [16] K. Mahler, Über das Mass der Menge aller S -Zahlen // *Math. Ann.* **106** (1932) 131–139.
- [17] V. Sprindzuk Mahler’s problem in the Metric Theory of Numbers, *Transl. Math. Monographs* **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
- [18] F. Želudevich, Simultane diophantische Approximationen abhängiger Grössen in mehreren Metriken // *Acta Arith.* **46** (1986) 285–296.

Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
Поступило 5.06.2011