

УДК 621.865, 004.942

Методология моделирования трехмерных механических систем с помощью универсальных программных комплексов анализа

доцент, к.т.н. Трудношин В. А.^{1,*},
Федорук В. Г.¹

[*trudonoshin@mail.ru](mailto:trudonoshin@mail.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье рассматривается методология разработки математических моделей (ММ) элементов трехмерных механических систем для универсальных программных комплексов моделирования, которые позволяют автоматически формировать ММ модель системы на основе ММ элементов и их связей. Основой методологии является ММ тела в трехмерном пространстве. В качестве основных фазовых переменных использованы линейные и угловые скорости, в качестве дополнительных линейные и угловые перемещения, причем последние задаются с помощью нормированных кватернионов, у которых есть вычислительные преимущества по сравнению с углами поворота. Рассмотрены уравнения динамики, формулы перехода от глобальной системы координат к локальной и обратно. В качестве примера элемента взаимодействия между телами рассмотрены различные варианты ММ подвижного шарнира, приведены уравнения и эквивалентные схемы и рекомендации по их практическому использованию.

Ключевые слова: САПР, математическая модель, эквивалентная схема, динамика, 3d-механика, кватернионы

Введение

Совместное моделирование трехмерных динамических систем с приводами различного типа возможно с помощью универсальных программных комплексов моделирования таких как ПА9[1], Pradis[2], AMESim[3]. Но для пополнения библиотеки математических моделей элементов трехмерных динамических систем необходима методология, которая в литературе в явном виде не опубликована. Цель данной статьи восполнить существующий пробел.

При математическом моделировании динамики пространственных механических систем в качестве фазовых переменных, характеризующих их состояние, принято использовать следующие:

1. V_x, V_y, V_z - линейные скорости центра масс тела в направлении осей глобальной (неподвижной) декартовой системы координат (ГСК);
2. $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - угловые скорости вращения тела вокруг осей ГСК;
3. F_x, F_y, F_z - силы, приложенные к центру масс в ГСК;
4. M_x, M_y, M_z - моменты сил в ГСК.

Переменные $V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ носят характер потенциала, а переменные $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ - потока [4].

Этот набор переменных достаточен для формирования математических выражений законов механики на уровне с сосредоточенными параметрами. Однако, во многих случаях вид этих выражений значительно упрощается, если указанный набор расширить переменными, характеризующими пространственное положение тел.

Таковыми переменными выступают x, y, z - координаты центра масс в ГСК - и переменные, описывающие угловую ориентацию тела. С точки зрения человека-пользователя математической модели для задания угловой ориентации удобны разновидности трех углов Эйлера[5,6]. Однако, при их использовании при моделировании многооборотных систем (например, содержащих роторы моторов) происходит постоянный рост значений углов, что ведет к снижению точности численного решения и неудобству интерпретации результатов. Кроме того, использование углов Эйлера связано с неопределенностью в положении тела при некоторых значениях углов (данный эффект известен как "схлопывание рамок двухрамного карданного подвеса").

Поэтому для описания угловой ориентации тела предпочтительней использовать параметры Эйлера, которые представляют собой нормированные кватернионы[7,8,9]. Теорема Эйлера утверждает, что любая угловая ориентация локальной системы координат (ЛСК) тела может быть описана единичным вектором u в глобальной системе координат и углом поворота α вокруг этого вектора по часовой стрелке. Тогда четыре параметра Эйлера определяются так:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(0,5 \alpha) \\ q_1 &= u_x \sin(0,5 \alpha), \\ q_2 &= u_y \sin(0,5 \alpha), \\ q_3 &= u_z \sin(0,5 \alpha). \end{aligned}$$

В работе с параметрами Эйлера отсутствуют какие-либо критические случаи. При этом существуют несложные математические выражения, позволяющие осуществить пересчет углов Эйлера в параметры Эйлера и обратно.

Математическая модель твердого тела

Модель отображает инерциальные свойства тела, в ее основе лежит второй закон Ньютона. Параметрами, характеризующими свойства твердого тела, являются масса m и три центральных момента инерции J_x, J_y, J_z . При этом оси ЛСК тела совпадают с осями его инерции. Кроме того, для задания начального состояния тела в ГСК используются:

1. начальные значения линейных скоростей центра масс;
2. начальные значения угловых скоростей;
3. начальные значения координат центра масс тела;
4. данные о начальной угловой ориентации тела.

Уравнения математической модели, описывающие взаимодействие тела с другими элементами системы, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} m \frac{dV_x}{dt} &= F_x, \\ m \frac{dV_y}{dt} &= F_y, \\ m \frac{dV_z}{dt} &= F_z, \\ J_{11} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{12} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{13} \frac{d\omega_z}{dt} &= M_x, \\ J_{21} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{22} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{23} \frac{d\omega_z}{dt} &= M_y, \\ J_{31} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{32} \frac{d\omega_y}{dt} + J_{33} \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z. \end{aligned}$$

Здесь m - масса тела, J_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$) - элементы матрицы моментов инерции тела в глобальной системе координат, рассчитанные перемножением матрицы направляющих косинусов $A_{\text{ЛГ}}$, диагональной матрицы, в качестве ненулевых элементов которой выступают центральные моменты инерции тела, и транспонированной матрицы направляющих косинусов $A_{\text{ЛГ}}$, то есть:

$$J = A_{\text{ЛГ}} J_{\text{ц}} A_{\text{ЛГ}}^T,$$

где

$$J_{\text{ц}} = \begin{vmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{vmatrix}.$$

Вычисление матрицы направляющих косинусов через параметры Эйлера выглядит следующим образом:

$$A_{\text{лг}} = \begin{bmatrix} 2(q_0q_0 + q_1q_1) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0q_0 + q_2q_2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0q_0 + q_3q_3) - 1 \end{bmatrix}$$

Транспонированная матрица $A_{\text{лг}}$ может использоваться для перехода от глобальной системы координат к локальной.

Уравнения, используемые в математической модели для определения текущих положения и ориентации тела, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V_x, \frac{dy}{dt} = V_y, \frac{dz}{dt} = V_z, \\ \frac{dq_0}{dt} &= -0,5(\omega_x^{\text{л}} * q_1 + \omega_y^{\text{л}} * q_2 + \omega_z^{\text{л}} * q_3), \\ \frac{dq_1}{dt} &= 0,5(\omega_x^{\text{л}} * q_0 + \omega_z^{\text{л}} * q_2 - \omega_y^{\text{л}} * q_3), \\ \frac{dq_2}{dt} &= 0,5(\omega_y^{\text{л}} * q_0 - \omega_z^{\text{л}} * q_1 + \omega_x^{\text{л}} * q_3), \\ \frac{dq_3}{dt} &= 0,5(\omega_z^{\text{л}} * q_0 + \omega_y^{\text{л}} * q_1 - \omega_x^{\text{л}} * q_2) \end{aligned}$$

где $\omega_x^{\text{л}}$, $\omega_y^{\text{л}}$, $\omega_z^{\text{л}}$ - угловые скорости тела в его локальной системе координат, которые могут быть вычислены через угловые скорости в глобальной системе координат по следующей формуле:

$$\omega^{\text{л}} = A_{\text{лг}}^T \omega.$$

Эквивалентная схема[4,10] математической модели твердого тела представлена ниже. Представление эквивалентной схемы обусловлено тем, что такие схемы дают представление о структуре объекта и позволяют автоматически сформировать математическую модель объекта при наличии компонентных уравнений элементов. Кроме того, описание эквивалентной схемы является языком описания моделей комплексов ПА8 и ПА9.

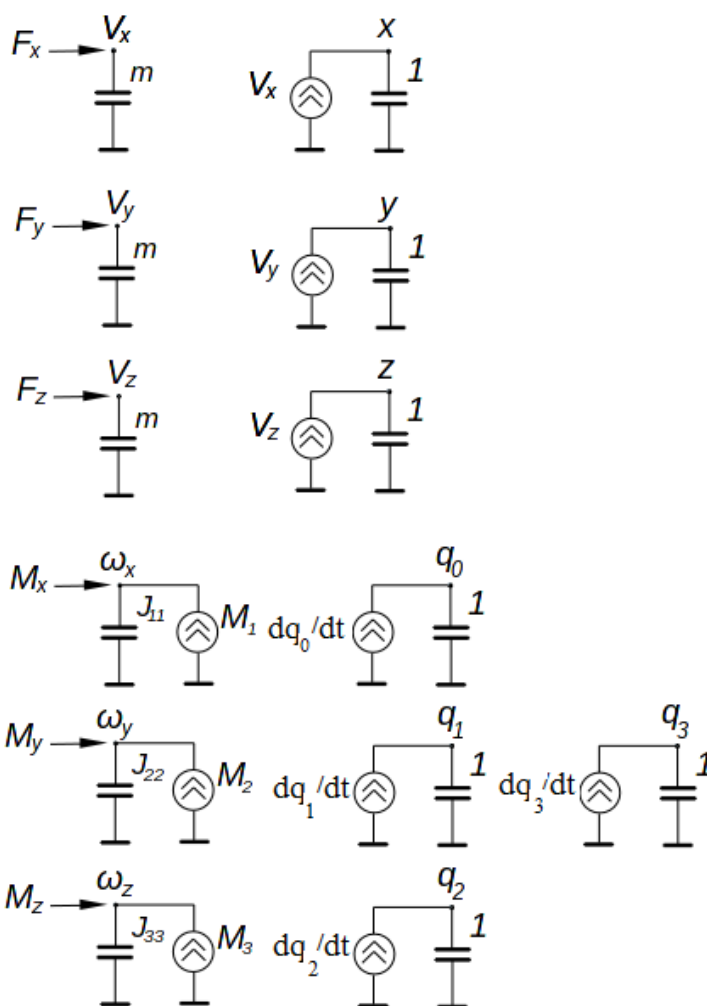


Рис. 1 Эквивалентная схема математической модели твердого тела.

Здесь

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -J_{12} \frac{d\omega_y}{dt} - J_{13} \frac{d\omega_z}{dt} \\
 M_2 &= -J_{21} \frac{d\omega_x}{dt} - J_{23} \frac{d\omega_z}{dt}, \\
 M_3 &= -J_{31} \frac{d\omega_x}{dt} - J_{23} \frac{d\omega_y}{dt}.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что данная ММ тела не отражает гироскопический эффект.

Математические модели элементов соединений

Для создания ММ элементов связи между телами (шарниров, направляющих, винтовых пар и т.п.) в общем случае используются три подхода.

- Учет кинематических ограничений, налагаемых связью, на базе линейных и угловых скоростей.

- Учет кинематических ограничений, налагаемых связью, на базе линейных и угловых перемещений.

- Моделирование кинематических ограничений, налагаемых связью, упругими силами и моментами.

Ниже рассматриваются все эти подходы на примере ММ сферического шарнира, связывающего два подвижных тела. Тремя обязательными параметрами математической модели являются координаты шарнира (в ГСК или ЛСК какого-либо из двух тел). Эти координаты используются для расчета координат шарнира $x^1, y^1, z^1, x^2, y^2, z^2$ в ЛСК тел, которые, в свою очередь, служат основой для расчета в ГСК проекций $r_x^1, r_y^1, r_z^1, r_x^2, r_y^2, r_z^2$ - радиус-векторов из центров тел к шарниру.

В модели первого вида используются следующие уравнения кинематики:

$$V_x = V_x^1 - V_x^2 = -r_z^1 \omega_y^1 + r_y^1 \omega_z^1 + r_z^2 \omega_y^2 - r_y^2 \omega_z^2,$$

$$V_y = V_y^1 - V_y^2 = r_z^1 \omega_x^1 - r_x^1 \omega_z^1 - r_z^2 \omega_x^2 + r_x^2 \omega_z^2,$$

$$V_z = V_z^1 - V_z^2 = -r_y^1 \omega_x^1 + r_x^1 \omega_y^1 + r_y^2 \omega_x^2 - r_x^2 \omega_y^2,$$

$$M_x^1 = r_z^1 F_y - r_y^1 F_z,$$

$$M_y^1 = -r_z^1 F_x + r_x^1 F_z,$$

$$M_z^1 = r_y^1 F_x - r_x^1 F_y,$$

$$M_x^2 = -r_z^2 F_y + r_y^2 F_z,$$

$$M_y^2 = r_z^2 F_x - r_x^2 F_z,$$

$$M_z^2 = -r_y^2 F_x + r_x^2 F_y.$$

Здесь V_x^1, V_y^1, V_z^1 - компоненты вектора скорости центра масса первого тела в ГСК;

V_x^2, V_y^2, V_z^2 - компоненты вектора скорости центра масса второго тела в ГСК;

$\omega_x^1, \omega_y^1, \omega_z^1$ - компоненты вектора угловой скорости первого тела в ГСК;

$\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$ - компоненты вектора угловой скорости второго тела в ГСК;

M_x^1, M_y^1, M_z^1 - компоненты вектора момента силы, возникающего в шарнире и действующего на первое тело, в ГСК;

M_x^2, M_y^2, M_z^2 - компоненты вектора момента силы, возникающего в шарнире и действующего на второе тело, в ГСК;

F_x, F_y, F_z - компоненты вектора силы, с которой тела взаимодействуют в шарнире, в ГСК.

Для вычисления величин $r^1 = r_x^1, r_y^1, r_z^1$ через $x^1 = x^1, y^1, z^1$ и $r^2 = r_x^2, r_y^2, r_z^2$ через $x^2 = x^2, y^2, z^2$ используются 2 матрицы направляющих косинусов, элементы которых рассчитываются по параметрам Эйлера соответствующих тел.

$$r^1 = A_{лг}^1 x^1, r^2 = A_{лг}^2 x^2.$$

Эквивалентная схема ММ представлена ниже.

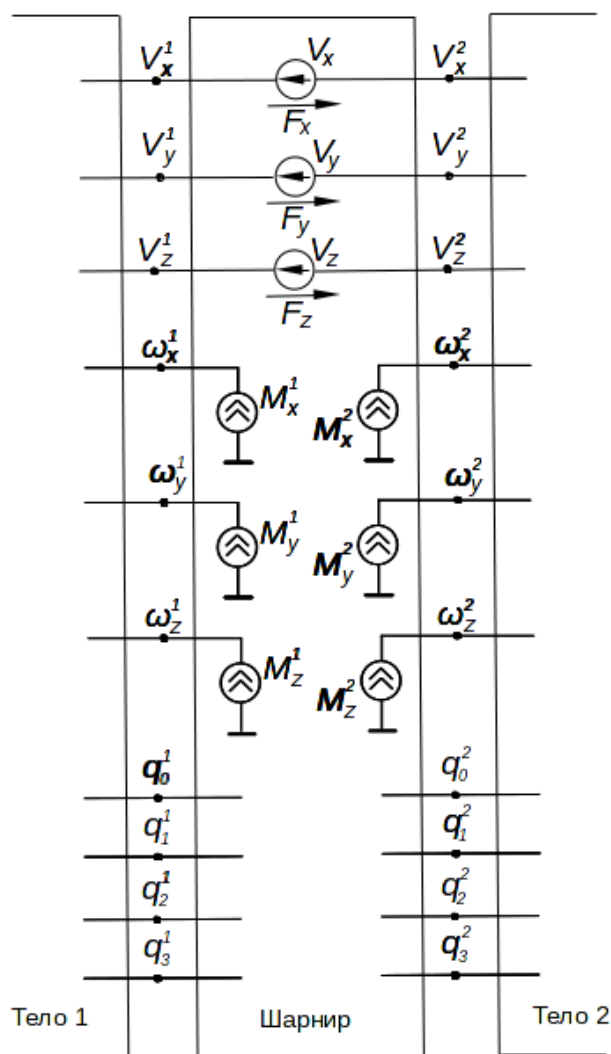


Рис.2 Эквивалентная схема математической модели шарнира на базе линейных и угловых скоростей.

Из рисунка ясно, что компоненты вектора силы взаимодействия F_x, F_y, F_z измеряются как потоки источников скорости V_x, V_y, V_z .

Необходимо отметить, что координаты центров масс тел x^1, y^1, z^1 и x^2, y^2, z^2 в ММ не используются (исключение - однократный предварительный расчет координат шарнира в ЛСК тел) и не контролируются. Это обстоятельство обуславливает возможное нарушение целостности системы тел из-за накопления погрешностей численного интегрирования при моделировании сложных переходных процессов.

В ММ шарнира, построенной с использованием второго подхода, уравнения для линейных скоростей заменены уравнениями для линейных перемещений. С этими тремя уравнениями ассоциируются три компонента вектора силы, с которой тела взаимодействуют в шарнире, в ГСК F_x, F_y, F_z .

Уравнения ММ имеют следующий вид.

$$\begin{aligned} x^1 + r_x^1 - x^2 - r_x^2 &= 0, \\ y^1 + r_y^1 - y^2 - r_y^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^1 + r_z^1 - z^2 - r_z^2 &= 0, \\
M_x^1 &= r_y^1 F_z - r_z^1 F_y, \\
M_y^1 &= r_z^1 F_x - r_x^1 F_z, \\
M_z^1 &= -r_y^1 F_x + r_x^1 F_y, \\
M_x^2 &= r_z^2 F_y - r_y^2 F_z, \\
M_y^2 &= -r_z^2 F_x + r_x^2 F_z, \\
M_z^2 &= r_y^2 F_x - r_x^2 F_y.
\end{aligned}$$

Ниже дана эквивалентная схема ММ.

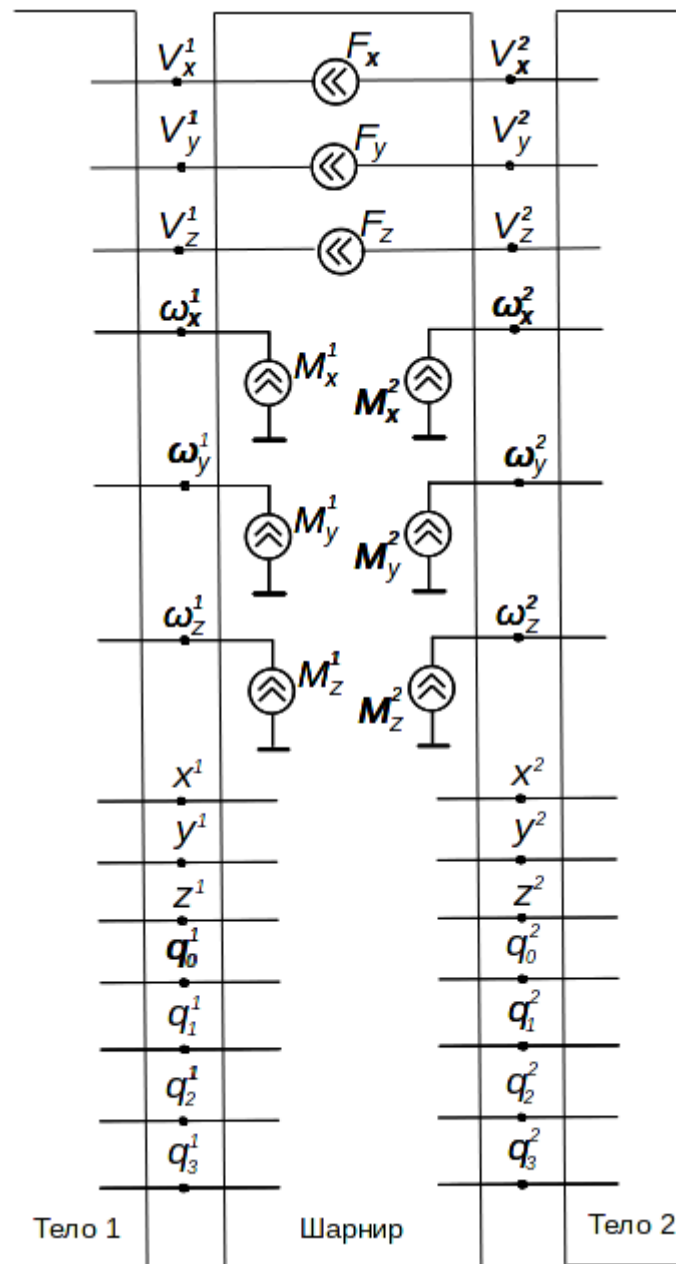


Рис.3 Эквивалентная схема математической модели шарнира на базе линейных и угловых перемещений.

Следует отметить, что уравнения для перемещений в эквивалентной схеме никак не отражаются. В программных комплексах моделирования, не допускающих включения в ММ произвольных уравнений, можно использовать такой прием. Для каждого уравнения в схему добавляется одиночный источник фазовой переменной типа потока, один из выводов которого соединяется с базовым узлом. Для вычисления потока через источник используется левая часть соответствующего уравнения. При этом "потенциал" небазового узла источника рассматривается в качестве значения дополнительной переменной.

Возможен и другой вариант записи кинематических уравнений для линейных перемещений:

$$\begin{aligned}x^{12} &= r_x^1 - r_x^2, \\y^{12} &= r_y^1 - r_y^2, \\z^{12} &= r_z^1 - r_z^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь вычисляются расстояния между центрами масс двух тел. Эквивалентная схема этого варианта будет соответствовать рис.2, но компонентные уравнения источников скорости следует заменить на уравнения (1). В данном варианте отсутствует необходимость введения дополнительного источника потока.

При построении ММ в рамках третьего подхода для определения силы взаимодействия тел в шарнире дополнительные уравнения не требуются. Шарнир рассматривается упругим, поэтому для определения компонентов силы F_x, F_y, F_z используется простейшие выражения для закона Гука

$$\begin{aligned}F_x &= k(x^2 + r_x^2 - x^1 - r_x^1), \\F_y &= k(y^2 + r_y^2 - y^1 - r_y^1), \\F_z &= k(z^2 + r_z^2 - z^1 - r_z^1).\end{aligned}$$

Здесь k - коэффициент упругости. Эквивалентная схема для данной ММ повторяет схему предыдущей модели.

Сферический шарнир - простейший вид механической связи, поэтому представленные ММ являются относительно простыми и легко воспринимаемыми. Однако рассмотренные подходы могут быть применены и при построении ММ более сложных элементов связи.

Усложнение представленных здесь моделей шарниров, например учетом трения в них, выполняется простым добавлением в эквивалентную схему элементов с заданным законом трения, подобным же образом можно учесть ограничение поворота в шарнире.

Заключение

Опыт создания и эксплуатации различных ММ механических систем показал, что в случаях, когда не требуется моделирование многоциклического процесса, можно рекомендовать модель, построенную на базе линейных и угловых скоростей как самую экономичную, с точки зрения затрат машинного времени. В противном случае следует

использовать модель, построенную на базе линейных и угловых перемещений или упругую модель, причем последняя позволяет проводить моделирование в том числе и при возможном заклинивании механизма. Описанная методология использовалась для создания библиотеки ММ наиболее распространенных элементов трехмерных механических систем (различных шарниров, направляющих, винтовых пар и т.п.) для комплексов моделирования ПА8 и ПА9[1]. С помощью данной библиотеки выполнялось моделирование различных систем (шасси самолета, подвес гироскопа и т.п.).

Список литературы

1. Применение комплекса ПА9 для проектирования объектов машиностроения // Центр дистанционного обучения МГТУ им. Н.Э. Баумана: сайт. Режим доступа: <http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html> (дата обращения 28.08.2015).
2. **PRADIS** - программный комплекс для анализа динамики систем различной физической природы // Ладуга. Инженерные услуги: сайт компании. **Режим доступа:** <http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml> (дата обращения 28.08.2015).
3. Решения LMS для моделирования и проведения испытаний // Siemens PLM Software: сайт компании. Режим доступа: http://www.plm.automation.siemens.com/ru_ru/products/lms/index.shtml _ (дата обращения 28.08.2015).
4. Трудоношин В.А., Пивоварова Н.В. САПР. В 9 кн. Кн. 4. Математические модели технических объектов / ред. И.П. Норенков. М.: Высшая школа, 1986. 160 с.
5. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов / под ред. А.А. Лебедева. М.: Машиностроение, 1973. 615 с.
6. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
7. Виттенбург Й. Динамика систем твёрдых тел: пер. с англ. М.: Мир, 1980. 292 с.
8. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2013. 23 с. (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН; № 39). Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39> (дата обращения 01.08.2015).
9. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной графике. Минск: БГУ, 2010. 216 с.
10. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 430 с.

A Simulation Technique for Three-Dimensional Mechanical Systems Using Universal Software Systems of Analysis

V.A. Trudonoshin^{1,*}, V.G. Fedoruk¹

trudonoshin@mail.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: CAD, mathematical model, equivalent circuit, dynamics, 3d-mechanics, quaternions

The article proposes a technique to develop mathematical models (MM) of elements of the three-dimensional (3D) mechanical systems for universal simulation software systems that allow us automatically generate the MM of a system based on MM elements and their connections. The technique is based on the MM of 3 D body. Linear and angular velocities are used as the main phase variables (unknown in the MM of the system), linear and angular movements are used as the additional ones, the latter being defined by the normalized quaternions that have computational advantages over turning angles.

The paper has considered equations of dynamics, formulas of transition from the global coordinate system to the local one and vice versa. A spherical movable joint is presented as an example of the interaction element between the bodies. The paper shows the MM equivalent circuits of a body and a spherical joint. Such a representation, as the equivalent circuit, automatically enables us to obtain topological equations of the system. Various options to build equations of the joint and advices for their practical use are given.

References

1. Primenenie kompleksa PA9 dlya proektirovaniya ob"ektov mashinostroeniya [Application of complex PA9 for design of engineering objects]. Distance Learning Center of the Bauman MSTU: website. Available at: <http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html> , accessed 28.08.2015. (in Russian).
2. PRADIS - programmnyy kompleks dlya analiza dinamiki sistem razlichnoy fizicheskoy prirody [PRADIS - software complex for the analysis of dynamics of systems of different physical nature]. Laduga. Automotive engineering: company website. Available at: <http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml> , accessed 28.08.2015. (in Russian).
3. LMS simulation and testing solutions. Siemens PLM Software: company website. Available at: http://www.plm.automation.siemens.com/en_gb/products/lms/index.shtml , accessed 28.08.2015.

4. Trudonoshin V.A., Pivovarova N.V. *SAPR. V 9 kn. Kn. 4. Matematicheskie modeli tekhnicheskikh ob"ektov* [Computer-aided design system. In 9 books. Book 4. Mathematical model of technical object]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1986. 160 p. (in Russian).
5. Lebedev A.A., Chernobrovkin L.S. *Dinamika poleta bespilotnykh letatel'nykh apparatov* [Flight dynamics of unmanned aerial vehicles]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 615 p. (in Russian).
6. Zhuravlev V.F. *Osnovy teoreticheskoi mekhaniki* [Foundations of theoretical mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 320 p. (in Russian).
7. Wittenburg J. *Dynamics of systems of rigid bodies*. Teubner, Stuttgart, 1977. (Russ. ed.: Wittenburg J. *Dinamika sistem tverdykh tel*. Moscow, Mir Publ., 1980. 292 p.).
8. Golubev Yu.F. *Algebra kvaternionov v kinematike tverdogo tela. Preprint no. 39* [Quaternion algebra in rigid body kinematics. Preprint no. 39]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, 2013. 23 p. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39> , accessed 01.08.2015.
9. Pobegailo A.P. *Primenenie kvaternionov v komp'yuternoi grafike* [Application of quaternion in computer graphics]. Minsk, BSU Publ., 2010. 216 p. (in Russian).
10. Norenkov I.P. *Osnovy avtomatizirovannogo proektirovaniya* [Fundamentals of CAD]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2009. 430 p. (in Russian).