УДК 517.52, 517.53

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

© О. А. Кривошеева

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076, г.Уфа, ул. Заки Валиди, 32

Email: kriolesya2006@yandex.ru

Работа посвящена построению целых функций экспоненциального типа, которые обращаются в ноль на почти вещественной последовательности и имеют рост, близкий к регулярному. Для произвольной кратной почти вещественной последовательности комплексных чисел строится целая функция экспоненциального типа, модуль которой имеет заданную оценку сверху всюду в комплексной плоскости. Кроме того, имеет место также аналогичная оценка снизу вне исключительного множества сколь угодно малой линейной плотности. При этом, целая функция обращается в ноль на указанной последовательности с заданной кратностью, которая совпадает с кратностью точки, как элемента последовательности. Рассматриваются также почти вещественные последовательности комплексных чисел, которые имеют нулевой индекс конденсации. Это означает, что расстояния между близкими друг к другу членами последовательности имеют специальные оценки снизу. При дополнительном условии равенства нулю индекса конденсации почти вещественной последовательности комплексных чисел строится целая функция экспоненциального типа, которая обладает более точными асимптотическими оценками снизу на ее рост. Логарифм модуля этой целой функции имеет заданный индикатор роста, который сколь угодно мало отличается от опорной функции вертикального отрезка комплексной плоскости. Вне исключительного множества кружков этот логарифм имеет также оценки снизу, которые отличаются от оценок сверху на заданную величину. Последнюю можно считать сколь угодно малой. Центрами указанных кружков являются точки почти вещественной последовательности комплексных чисел. Каждый из этих кружков содержит лишь одну точку последовательности – центр кружка. Радиусы этих кружков можно сделать сколь угодно малыми по сравнению с модулями их центров. Кроме того, указанная целая функция экспоненциального типа обращается в ноль во всех точках почти вещественной последовательности комплексных чисел с заданной кратностью. При дополнительном условии конечной максимальной плотности последовательности размер указанного выше вертикального отрезка можно считать фиксированным.

Ключевые слова: *целая функция экспоненциального типа, линейная плотность, почти вещественная последовательность, верхняя плотность.*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ строго возрастает и $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательность Λ будем называть почти вещественной, если $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ и $\mathrm{Im}\lambda_k/\mathrm{Re}\lambda_k \to 0$, когда $k \to \infty$.

Пусть $B(z,r), S(z,r)$ – открытый круг и окружность с центром в точке z и радиуса r. Через $n(z,r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в замкнутый круг $\overline{B(z,r)}$, а через $\overline{n}(\Lambda)$ – верхнюю плотность последовательности Λ:

$$\overline{n}(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} n(0,r,\Lambda)/r.$$

Пусть f – целая функция. Говорят, что f имеет экспоненциальный тип, если для некоторых $A, B \geq 0$ выполнено неравенство $\ln|f(\lambda)| \leq A + B|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}$. Индикатором f называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \ln|f(t\lambda)|/t\,, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Пусть $d > 0$. Следуя [1] будем говорить, что последовательность $\{\varsigma_l\}$ является асимптотически d – близкой к $\{\xi_l\}$, если $\overline{\lim_{l\to\infty}} |\varsigma_l - \xi_l|/|\xi_l| \leq d$.

Будем также говорить, что множество кругов $E = \cup B_i$ центрировано с последовательностью $\{\xi_l\}$, если каждая точка ξ_l принадлежит хотя бы одному из кругов B_i, и каждый круг B_i содержит по крайней мере одну точку ξ_l. Напомним еще, что линейной плотностью множества $E = \cup B(z_i,\rho_i)$ называется величина

$$p_E = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \sum\nolimits_{|z_i|<r} \rho_i.$$

Следующее утверждение является некоторым уточнением теоремы об оценке снизу модуля целой функции экспоненциального типа (см. [2], глава I, §1, теорема 1.1.9).

Лемма 1. *Пусть f – целая функция, $f(0) \neq 0$, удовлетворяющая оценке*

$$\ln|f(\lambda)| \leq A + B|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}.$$

с некоторыми $A, B > 0$. Тогда для каждого $\beta \in (0,1)$ существует множество кругов $E(\beta)$, которое центрировано с нулевым множеством f, имеет линейную плотность не выше чем β и такое, что выполнено неравенство

$$\ln|f(\lambda)| \geq \ln|f(0)| - b(\beta)(A + 12B|\lambda|),$$
$$\lambda \in \mathbb{C}\backslash E(\beta),$$

где $b(\beta) = 3 + \ln(48/\beta)$.

Доказательство. Пусть $\beta \in (0,1)$ и $m \geq 1$. По теореме об оценке снизу модуля аналитической функции в круге (см. [3], гл. I, §4, теорема 4.2) имеет место неравенство

$$\ln|f(\lambda)| \geq \ln|f(0)| - \big(2 + \ln(48e/\beta)\big)(A + Be2^{m+1}),$$

которое выполнено в круге $B(0, 2^m)$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, равной $\beta 2^m/8$. Отметим, что эта теорема опирается на теорему Картана (см. [3], гл. I, §4, теорема 4.1) об оценке снизу полинома. Из доказательства последней видно, что число исключительных кружков конечно и каждый из них содержит хотя бы один нуль функции f. Пусть $B\big(z_{j,m}, r_{j,m}\big), j = \overline{1, j(m)}$ – подмножество всех исключительных кружков, которые пересекают кольцо $K_m = B(0, 2^m)\backslash B(0, 2^{m-1})$. Тогда $\sum_j r_{j,m} \leq \beta 2^m/8$. Поскольку $2^{m+1} \leq 4|\lambda|$, если $\lambda \in K_m$, то имеем:

$$\ln|f(\lambda)| \geq \ln|f(0)| - b(\beta)(A + 12B|\lambda|), \quad \lambda \in K_m \backslash \cup_j B\big(z_{j,m}, r_{j,m}\big).$$

Таким образом, полагая $E(\beta) = B(0, R) \cup_{j,m} B\big(z_{j,m}, r_{j,m}\big)$, где $R \geq 1$, получаем требуемое неравенство. Множество $E(\beta)$ центрировано с нулевым множеством f. Действительно, очевидно, что каждый элемент последнего принадлежит $E(\beta)$. Кроме того, каждый круг $B\big(z_{j,m}, r_{j,m}\big)$ содержит хотя бы один нуль f. Если $R > 0$ достаточно большое, то тоже самое можно сказать о круге $B(0, R)$.

Остается показать, что $E(\beta)$ имеет линейную плотность не выше чем β. Пусть $r > 0$ и $\big|z_{j,m}\big| < r$. Тогда согласно выбору кружков $B\big(z_{j,m}, r_{j,m}\big)$ верно неравенство $r + \beta 2^m/8 > 2^{m-1}$. Отсюда получаем $4r > 2^m$. Через $m(r)$ обозначим максимальный из номеров m, для которых $4r > 2^m$. Имеем:

$$\sum_{|z_{j,m}|<r} r_{j,m} \leq \sum_{m=1}^{m(r)} \sum_{j=1}^{j(m)} r_{j,m} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{m(r)} \frac{\beta 2^m}{8} = \sum_{m=1}^{m(r)} \frac{\beta 2^{m(r)}}{2^{m(r)-m} 8} \leq \sum_{m=1}^{m(r)} \frac{\beta r}{2^{m(r)+1-m}} \leq \beta r.$$

Таким образом $p_{E(\beta)} \leq \beta$. Лемма доказана.

Пусть $\delta \in (0,1)$. Положим $\Gamma(\delta) = \{t\lambda: \lambda \in B(1, \delta), t \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – почти вещественная последовательность такая, что $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда для любых $\varepsilon > 0, \delta \in (0,1)$ существуют $\gamma \in (0,1)$, целая функция экспоненциального типа f и строго возрастающая последовательность положительных чисел $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $t_{i+1} \leq (1 + \delta)t_i, i \geq 1$, $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$, f обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k и выполнены неравенства

$$\left|\ln|f(\lambda)| - \frac{\pi|\mathrm{Im}\lambda|}{\gamma}\right| \leq \varepsilon|\lambda|, \quad \in \Big(\mathbb{C}\backslash\big(\Gamma(\delta) \cup B(0, t_1)\big)\Big) \cup \big(\cup_{i=1}^{\infty} S(0, t_i)\big), \quad (1)$$

$$h_f(\lambda) \leq \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma + \varepsilon|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon, \delta > 0$. Очевидно, при необходимости можно считать их сколь угодно малыми. Для определения искомой функции f нам потребуется осуществить построение ее нулевого множества, которое мы разобьем на шесть этапов.

1) На первом этапе заменим Λ на последовательность положительных чисел $\Lambda^1 = \{\xi_l\}$, состоящую из вещественных частей $\mathrm{Re}\lambda_k$ элементов Λ. При этом каждое число $\mathrm{Re}\lambda_k$ встречается в Λ^1 ровно столько раз, какова сумма кратностей точек λ_j с вещественной частью равной $\mathrm{Re}\lambda_k$. Рассмотрим функции

$$L(\lambda) = \prod\nolimits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{{\lambda_k}^2}\right)^{n_k},$$

$$L_1(\lambda) = \prod\nolimits_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{{\xi_l}^2}\right).$$

Очевидно, что Λ^1 как и Λ имеет конечную верхнюю плотность. Поэтому (см., напр., [2], гл. I, § 1, теорема 1.1.5) $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$ являются целыми функциями экспоненциального типа. Сравним их поведение. Для этого воспользуемся результатом из работы [1].

Поскольку Λ^1 имеет конечную верхнюю плотность, то конечна также величина $C = \sup_r n(0, r, \Lambda^1)/r$. Пусть $\widetilde{\Lambda}$ ($\widetilde{\Lambda^1}$) – объединение Λ (Λ^1) и множества $-\Lambda$ ($-\Lambda^1$) симметричного ему относительно начала. По условию Λ почти вещественная. Поэтому Λ является асимптотически d – близкой к Λ^1 для любого $d > 0$. Тогда по теореме B из работы [1] (учитывая симметричность нулей функций L и L_1 относительно начала) для каждого $d \in (0, 1/2)$ найдем $C_1 > 0$ (которое зависит только от C) и объединение кругов $E^1(d) = \cup B(y_i, q_i)$ такие, что $E^1(d)$ центрировано с $\widetilde{\Lambda} \cup \widetilde{\Lambda^1}$, имеет линейную плотность $\leq \sqrt[4]{d}$ и

$$\big|\ln|L(\lambda)| - \ln|L_1(\lambda)|\big| \leq C_1\sqrt{d}|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash E^1(d). \quad (3)$$

2) На втором этапе разобьем Λ^1 на группы, лежащие на специальных полуинтервалах вещественной оси. Фиксируем $\gamma \in (0, 1/4C), \gamma < 1$. По индукции построим группы $\Lambda_p^1(\gamma), p \geq 1$, так, что $\Lambda^1 = \cup_p \Lambda_p^1(\gamma)$. Пусть $p = 1$ и $l_1(\gamma) \geq 0$ – минимальное целое число, для которого полуинтервал $(l_1(\gamma)\gamma, (l_1(\gamma) + 1)\gamma]$ содержит хотя бы одну точку из Λ^1. Выберем теперь минимальное натуральное число $m_1(\gamma) > l_1(\gamma)$ такое, что $(l_1(\gamma)\gamma, m_1(\gamma)\gamma]$ содержит не более чем $m_1(\gamma) - l_1(\gamma)$ элементов последовательности Λ^1. Оно существует, т.к. согласно определению C и выбору γ для больших m имеем: $n(0, m\gamma, \Lambda^1) \leq Cm\gamma \leq m(1 - l_1(\gamma)/m) = m - l_1(\gamma)$. В качестве $\Lambda_1^1(\gamma)$ возьмем множество всех элементов Λ^1, лежащих на $(l_1(\gamma)\gamma, m_1(\gamma)\gamma]$. Предположим, что мы построили группы $\Lambda_p^1(\gamma) \subset \big(l_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma\big], p = \overline{1, j}$. Пусть $l_{j+1}(\gamma) \geq m_j(\gamma)$ – минимальное натуральное число, для которого $\big(l_{j+1}(\gamma)\gamma, \big(l_{j+1}(\gamma) + 1\big)\gamma\big]$ содержит точки из Λ^1. Как и выше существует минимальное натуральное $m_{j+1}(\gamma) > l_{j+1}(\gamma)\gamma$ такое, что

$$n\big(0, m_{j+1}(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) - n\big(0, l_{j+1}(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) \le \le m_{j+1}(\gamma) - l_{j+1}(\gamma). \quad (4)$$

В качестве $\Lambda^1_{j+1}(\gamma)$ возьмем множество всех элементов Λ^1, лежащих на полуинтервале $\big(l_{j+1}(\gamma)\gamma, m_{j+1}(\gamma)\gamma\big]$. Таким образом, мы разбили Λ^1 на группы $\Lambda^1_p(\gamma), p \ge 1$.

Согласно определению величины $m_p(\gamma)$ верно неравенство $n\big(0, \big(m_p(\gamma)-1\big)\gamma, \Lambda^1\big) - n\big(0, l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) > m_p(\gamma) - 1 - l_p(\gamma)$. Следовательно, $n\big(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) - n\big(0, l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) \ge m_p(\gamma) - l_p(\gamma)$. Вместе с (4) это дает нам равенство

$$n\big(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) - n\big(0, l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) = = m_p(\gamma) - l_p(\gamma), p \ge 1. \quad (5)$$

3. На третьем этапе построим вспомогательную последовательность $\Lambda^2(\gamma)$, элементы которой лежат на полуинтервалах $\big(l_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma\big]$ в некотором смысле правильным образом. Положим $\Lambda^2(\gamma) = \bigcup_p \Lambda^2_p(\gamma)$, где $\Lambda^2_p(\gamma) = \big\{\big(l_p(\gamma)+1\big)\gamma, \dots, m_p(\gamma)\gamma\big\}, p \ge 1$. Тогда

$$n\left(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^2(\gamma)\right) - n\left(0, l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^2(\gamma)\right) = = m_p(\gamma) - l_p(\gamma), p \ge 1. \quad (6)$$

Введем функцию

$$L_2(\lambda, \gamma) = \prod\nolimits_{\eta_j \in \Lambda^2(\gamma)} \left(1 - \frac{\lambda^2}{{\eta_j}^2}\right).$$

Сравним нулевые множества $L_2(\lambda, \gamma)$ и $L_1(\lambda)$. В силу (5) и (6) между ними имеется взаимно однозначное соответствие так, что каждому нулю ξ_j функции $L_1(\lambda)$ из полуинтервала $\big(l_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma\big]$ (или симметричного ему относительно начала координат) сопоставляется нуль η_j функции $L_2(\lambda, \gamma)$ из этого же полуинтервала. Поэтому

$$\frac{|\xi_j - \eta_j|}{\xi_j} \le \frac{m_p(\gamma)\gamma - l_p(\gamma)\gamma}{l_p(\gamma)\gamma} = \frac{m_p(\gamma) - l_p(\gamma)}{l_p(\gamma)}.$$

В силу (5) и определения числа C имеем:

$$m_p(\gamma) - l_p(\gamma) = n\big(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) - -n\big(0, l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) \le \le n\big(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) \le C m_p(\gamma)\gamma.$$

Отсюда получаем $l_p(\gamma) \ge m_p(\gamma)(1 - C\gamma)$. Следовательно,

$$\frac{|\xi_j - \eta_j|}{\xi_j} \le \frac{m_p(\gamma) - l_p(\gamma)}{l_p(\gamma)} \le \frac{C m_p(\gamma)\gamma}{m_p(\gamma)(1 - C\gamma)} = = \frac{C\gamma}{(1 - C\gamma)} \le 2C\gamma =: d(\gamma). \quad (7)$$

Таким образом, $\widetilde{\Lambda}^2(\gamma) = \Lambda^2(\gamma) \cup \big(-\Lambda^2(\gamma)\big)$ является асимптотически $d(\gamma)$ – близким к $\widetilde{\Lambda}^1$. Тогда по теореме B из работы [1] (учитывая симметричность $\widetilde{\Lambda}^1, \widetilde{\Lambda}^2(\gamma)$ относительно начала) найдем $C_2 > 0$ (зависящее только от C) и объединение кругов $E^2(\gamma) = \bigcup B^2_i(\gamma)$ такие, что $E^2(\gamma)$ центрировано с $\widetilde{\Lambda}^1 \cup \widetilde{\Lambda}^2(\gamma)$, множество $E^2(\gamma)$ имеет линейную плотность, не превосходящую $\sqrt[4]{d(\gamma)}$ и выполнено неравенство

$$\big|\ln|L_1(\lambda)| - \ln|L_2(\lambda, \gamma)|\big| \le C_2\sqrt{d(\gamma)}|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash E^2(\gamma), \quad (8)$$

4. На четвертом этапе несколько уточним по сравнению с (8) оценки сверху на $\ln|L_1(\lambda)|$ вдоль вещественной прямой. Т.к. $\widetilde{\Lambda}^1, \widetilde{\Lambda}^2(\gamma)$ симметричны относительно начала, то согласно утверждению перед теоремой 4 из работы [1] (формула (38)) верна оценка

$$|\ln|L_1(\lambda)| - \ln|L_2(\lambda, \gamma)| + I(\lambda, \gamma)| \le \le C_3 d(\gamma)|\lambda|, |\lambda| \ge R, \quad (9)$$

где постоянные C_3, R зависят только от C и

$$I(\lambda, \gamma) = \int_0^1 \frac{n\big(\lambda, t|\lambda|, \widetilde{\Lambda}^1\big) - n\left(\lambda, t|\lambda|, \widetilde{\Lambda}^2(\gamma)\right)}{t(1+t)}\, dt.$$

Пусть $\tilde{\delta} > 0$. Найдем оценки сверху для $-I(\lambda, \gamma)$ на вещественной прямой вне кругов $B\big(\eta_j, \tilde{\delta}\gamma\big), \eta_j \in \widetilde{\Lambda}^2(\gamma),$. В силу симметричности множеств $\widetilde{\Lambda}^1$ и $\widetilde{\Lambda}^2(\gamma)$ это достаточно сделать для положительной части $\mathbb{R}$. Пусть $\lambda > 0$ и $\big|\lambda - \eta_j\big| \ge \gamma/4$ для всех $\eta_j \in \Lambda^2(\gamma)$. Положим для удобства $m_0(\gamma) = 0$. Пусть $p(0) \ge 0$ – максимальное целое число, такое, что $\lambda > m_{p(0)}(\gamma)\gamma$ и $p(1)$ – минимальное натуральное число, такое, что $\lambda < l_{p(1)}(\gamma)\gamma$. Разобьем Λ^1 на три части:

$$\Lambda^1(\gamma, 0) = \bigcup_{p=1}^{p(0)} \Lambda^1_p(\gamma), \Lambda^1(\gamma, 2) = \bigcup_{p \ge p(1)} \Lambda^1_p(\gamma),$$

$$\Lambda^1(\gamma, 1) = \Lambda^1\backslash\big(\Lambda^1(\gamma, 0) \cup \Lambda^1(\gamma, 2)\big).$$

Если $p(0) = 0$, то $\Lambda^1(\gamma, 0)$ – пустая. Если же $p(0) = p(1) - 1$, то пустой будет $\Lambda^1(\gamma, 1)$. В противном случае $\Lambda^1(\gamma, 1) = \Lambda^1_{p(0)+1}(\gamma) = \Lambda^1_{p(1)-1}(\gamma)$. Аналогичным образом определим $\Lambda^2(\gamma, 0), \Lambda^2(\gamma, 1), \Lambda^2(\gamma, 2)$. В этих обозначениях получаем:

$$-I(\lambda, \gamma) = = \sum_{i=0}^{2} \int_0^{\lambda} \frac{n\big(\lambda, y, \Lambda^2(\gamma, i)\big) - n\big(\lambda, y, \Lambda^1(\gamma, i)\big)}{y(1 + y/\lambda)}\, dy \quad (10)$$

Если $\Lambda^1(\gamma, i)$ пусто, то соответствующее слагаемое отсутствует. Оценим сверху каждое из них. Поскольку Λ^1 и $\Lambda^2(\gamma)$ расположены на полуинтервалах $\big(l_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma\big], p \ge 1$, то в силу *(5)* и *(6)* имеем: $n\big(\lambda, y, \Lambda^2(\gamma, 2)\big) - n(\lambda, y, \Lambda^1$ $(\gamma, 2)) = 0$, $\lambda + y \notin \big(l_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma\big]$. Пусть $\lambda + y \in \big(l_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma\big], p \ge p(1)$. Выберем минимальное натуральное число $s(y)$ такое, что $\lambda + y \in \big(l_p(\gamma)\gamma, s(y)\gamma\big]$. Пусть $s(y) = l_p(\gamma) + 1$. Если $\lambda + y = s(y)\gamma$, то $n\left(l_p(\gamma)\gamma, \lambda + y - l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^2_p(\gamma)\right) = 1$ и $n\left(l_p(\gamma)\gamma, \lambda + y - l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1_p(\gamma)\right) \ge 1$ согласно определению $l_p(\gamma)$. В противном случае $n\left(l_p(\gamma)\gamma, \lambda + y - l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^2_p(\gamma)\right) = 0$. Пусть теперь $s(y) > l_p(\gamma) + 1$. Тогда в силу определений $\Lambda^2_p(\gamma)$ и $m_p(\gamma)$ имеем: $n\left(l_p(\gamma)\gamma, \lambda + y - l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^2_p(\gamma)\right) \le s(y) - l_p(\gamma)$ и $n\left(l_p(\gamma)\gamma, \lambda + y - l_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1_p(\gamma)\right) \ge n\left(l_p(\gamma)\gamma, \big(s(y) - l_p(\gamma) - 1\big)\gamma, \Lambda^1_p(\gamma)\right) > s(y) - -l_p(\gamma) - 1 \ge s(y) - l_p(\gamma)$. Таким образом, подынтегральная функция в третьем слагаемом из *(10)* не положительна. Следовательно,

$$\int_0^{\lambda} \frac{n\left(\lambda,y,\Lambda^2(\gamma,2)\right)-n\left(\lambda,y,\Lambda^1(\gamma,2)\right)}{y(1+y/\lambda)}dy \le 0. \quad (11)$$

Оценим теперь второе слагаемое в *(10)*. Если $\Lambda^2(\gamma,1)\neq\emptyset$, то $\Lambda^2(\gamma,1)=\Lambda^2_{p(0)+1}(\gamma)$ и $\lambda\in\left(l_{p(0)+1}(\gamma)\gamma, m_{p(0)+1}(\gamma)\gamma\right]$. Положим $y(\lambda)=\max\{\lambda-l_{p(0)+1}(\gamma)\gamma, m_{p(0)+1}(\gamma)\gamma-\lambda\}$. Учитывая, что $|\lambda-\eta_j|\ge\tilde{\delta}\gamma$ для всех $\eta_j\in\Lambda^2(\gamma)$ и определение $\Lambda^1_{p(0)+1}(\gamma)$, имеем:

$$\int_0^{\lambda}\frac{n\left(\lambda,y,\Lambda^2(\gamma,1)\right)-n\left(\lambda,y,\Lambda^1(\gamma,1)\right)}{y(1+y/\lambda)}dy \le$$
$$\le\int_{\tilde{\delta}\gamma}^{y(\lambda)}\frac{n\left(\lambda,y,\Lambda^2_{p(0)+1}(\gamma)\right)dy}{y(1+y/\lambda)}\le$$
$$\le\int_{\tilde{\delta}\gamma}^{y(\lambda)}\frac{2y/\gamma+2}{y(1+y/\lambda)}dy\le$$
$$\le 2a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)+\frac{2\lambda\ln(1+y(\lambda)/\lambda)}{\gamma}\le$$
$$\le 2a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)+\frac{2y(\lambda)}{\gamma}, \quad (12)$$

где

$$a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)=\int_{\tilde{\delta}\gamma}^{\lambda}\frac{dy}{y(1+y/\lambda)}=$$
$$=\ln\frac{\lambda}{\tilde{\delta}\gamma}-\ln\frac{2\lambda}{\tilde{\delta}\gamma+\lambda}=\ln\frac{\tilde{\delta}\gamma+\lambda}{2\tilde{\delta}\gamma}.$$

Оценим, первое слагаемое в *(10)*. Как и выше верно равенство $n\left(\lambda,y,\Lambda^2(\gamma,0)\right)-n\left(\lambda,y,\Lambda^1(\gamma,0)\right)=0, \lambda-y\notin\left(l_p(\gamma)\gamma,m_p(\gamma)\gamma\right]$. Пусть $\lambda-y\in\left(l_p(\gamma)\gamma,m_p(\gamma)\gamma\right], p\le p(0)$. Положим $y_p=y+\lambda-m_p(\gamma)\gamma$. Тогда с учетом определения $\Lambda^2_p(\gamma)$ получаем

$$\int_0^{\lambda}\frac{n\left(\lambda,y,\Lambda^2(\gamma,0)\right)-n\left(\lambda,y,\Lambda^1(\gamma,0)\right)}{y(1+y/\lambda)}dy\le$$
$$\le\sum_{p=1}^{p(0)}\int_0^{\left(m_p(\gamma)-l_p(\gamma)\right)\gamma}\frac{n\left(m_p(\gamma)\gamma,y,\Lambda^2_p(\gamma)\right)}{y_p\left(1+y_p/\lambda\right)}dy\le$$
$$\le\sum_{p=1}^{p(0)}\int_{\lambda-m_p(\gamma)\gamma}^{\lambda-l_p(\gamma)\gamma}\frac{y_p-\lambda+m_p(\gamma)\gamma+\gamma}{\gamma y_p\left(1+y_p/\lambda\right)}dy_p\le$$
$$\le\sum_{p=1}^{p(0)}\int_{\lambda-m_p(\gamma)\gamma}^{\lambda-l_p(\gamma)\gamma}\frac{dy_p}{\gamma\left(1+y_p/\lambda\right)}dy_p+$$
$$+\sum_{p=1}^{p(0)}\int_{\lambda-m_p(\gamma)\gamma}^{\lambda-l_p(\gamma)\gamma}\frac{m_p(\gamma)\gamma-\lambda}{\gamma y_p\left(1+y_p/\lambda\right)}dy_p+$$
$$+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)=\sum_{p=1}^{p(0)}\frac{\lambda}{\gamma}\ln\left(\frac{2\lambda-l_p(\gamma)\gamma}{2\lambda-m_p(\gamma)\gamma}\right)+$$
$$+\sum_{p=1}^{p(0)}\frac{m_p(\gamma)\gamma-\lambda}{\gamma}\left(\begin{array}{c}\ln\left(\frac{\lambda-l_p(\gamma)\gamma}{\lambda-m_p(\gamma)\gamma}\right)-\\-\ln\left(\frac{2\lambda-l_p(\gamma)\gamma}{2\lambda-m_p(\gamma)\gamma}\right)\end{array}\right)$$
$$+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)=$$
$$=\sum_{p=1}^{p(0)}\left(\begin{array}{c}\frac{2\lambda-m_p(\gamma)\gamma}{\gamma}\ln\left(1+\frac{m_p(\gamma)\gamma-l_p(\gamma)\gamma}{2\lambda-m_p(\gamma)\gamma}\right)-\\-\frac{\lambda-m_p(\gamma)\gamma}{\gamma}\ln\left(1+\frac{m_p(\gamma)\gamma-l_p(\gamma)\gamma}{\lambda-m_p(\gamma)\gamma}\right)\end{array}\right)$$
$$+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)=$$
$$=\sum_{p=1}^{p(0)}a_p(\lambda,\gamma)+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right). \quad (13)$$

Отсюда и из (5) следует, что

$$\int_0^{\lambda}\frac{n\left(\lambda,y,\Lambda^2(\gamma,0)\right)-n\left(\lambda,y,\Lambda^1(\gamma,0)\right)}{y(1+y/\lambda)}\le$$
$$\le\sum_{p=1}^{p(0)}\frac{2\lambda-m_p(\gamma)\gamma}{\gamma}\times$$
$$\times\ln\left(1+\frac{m_p(\gamma)\gamma-l_p(\gamma)\gamma}{2\lambda-m_p(\gamma)\gamma}\right)+$$
$$+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)\le$$
$$\le\sum_{p=1}^{p(0)}\left(m_p(\gamma)-l_p(\gamma)\right)+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)\le$$
$$\le n(0,\lambda,\Lambda^1)+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)\le C\lambda+a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right).$$

Учитывая (10)–(12), имеем: $-I(\lambda,\gamma)\le C\lambda+2\left(m_{p(0)+1}(\gamma)-l_{p(0)+1}(\gamma)\right)+3a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)$. В силу (5) верно неравенство $m_{p(0)+1}(\gamma)-l_{p(0)+1}(\gamma)\le Cm_{p(0)+1}(\gamma)\gamma$. Следовательно, $\lambda\ge l_{p(0)+1}(\gamma)\gamma\ge m_{p(0)+1}(\gamma)(1-C\gamma)\gamma$. Таким образом,

$$-I(\lambda,\gamma)\le C\lambda+4C\lambda(1-C\gamma)^{-1}+3a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right)\le$$
$$\le 7C\lambda+3a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right). \quad (14)$$

Получим теперь более точную оценку на $I(\lambda,\gamma)$ вне специального набора интервалов. Фиксируем $\varepsilon_1>0$. Через $P(\varepsilon_1)$ обозначим набор всех индексов p, для которых $m_p(\gamma)-l_p(\gamma)>\varepsilon_1 m_p(\gamma)\gamma$. Положим $E(\gamma,\varepsilon_1)=\cup_{p\in P(\varepsilon_1)}\left(l_p(\gamma)\gamma,m_p(\gamma)\gamma(1+4Cd(\gamma)\varepsilon^{-1})\right)$. Пусть $\lambda\notin E(\gamma,\varepsilon_1)$. Если левее λ есть точки из $E(\gamma,\varepsilon_1)$, то найдется максимальный номер $p(2)\in P(\varepsilon_1)$, такой, что $p(2)\le p(0)$. В противном случае полагаем $p(2)=0$. Пусть $p(2)\neq 0$. Тогда с учетом (7) получаем

$$\sum_{p=1}^{p(2)}a_p(\lambda,\gamma)\le\sum_{p=1}^{p(2)}\frac{\left(m_p(\gamma)\gamma-l_p(\gamma)\gamma\right)^2}{2\gamma\left(\lambda-m_p(\gamma)\gamma\right)}\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{p=1}^{p(2)}\frac{\left(m_p(\gamma)-l_p(\gamma)\right)^2}{8Cd(\gamma)m_p(\gamma)}\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{p=1}^{p(2)}\frac{m_p(\gamma)-l_p(\gamma)}{8C}\le\varepsilon n(0,\lambda,\Lambda^1)(8C)^{-1}\le$$
$$\le\varepsilon\lambda/8. \quad (15)$$

Начиная с $p(s) < p(0)$, выберем максимальные номера $p(s) > \cdots > p(3) \geq p(2)$ такие, что

$$\sum_{p=p(s)+1}^{p(0)} \big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big) > \varepsilon_1\lambda, \sum_{p=p(j-1)+1}^{p(j)} \big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big) > \varepsilon_1\lambda, j = \overline{4,s},$$
$$\sum_{p=p(2)+1}^{p(3)} \big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big) \leq \varepsilon_1\lambda. \quad (16)$$

Если $p(3) = p(2)$ или $s = 3$, то ситуация упрощается. Рассмотрим общий случай. Имеем:

$$\lambda - m_i(\gamma)\gamma \geq \sum_{p=i+1}^{p(0)} \big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big)\gamma, \quad i < p(0).$$

Отсюда и из (16) с учетом определения $p(2)$ и максимальности $p(j)$ получаем

$$\sum_{p=p(j-1)+1}^{p(j)} a_p(\lambda,\gamma) \leq \leq \sum_{p=p(j-1)+1}^{p(j)} \frac{\gamma\big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big)^2}{2\big(\lambda - m_p(\gamma)\gamma\big)} \leq \leq \sum_{p=p(j-1)+1}^{p(j)} \frac{\big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big)^2}{2\varepsilon_1\lambda(s+1-j)} \leq \leq \sum_{p=p(j-1)+1}^{p(j)} \frac{m_p(\gamma) - l_p(\gamma)}{2(s+1-j)} \leq \frac{\varepsilon_1\lambda}{s+1-j},$$
$$j = 3, \dots, s. \quad (17)$$

Кроме того, имеем:

$$\sum_{p=p(s)+1}^{p(0)} a_p(\lambda,\gamma) \leq \leq \sum_{p=p(s)+1}^{p(0)} \big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big) \leq 2\varepsilon_1\lambda. \quad (18)$$

Поскольку $\lambda \notin E(\gamma,\varepsilon_1)$, то $m_{p(0)+1}(\gamma) - l_{p(0)+1}(\gamma) \leq \varepsilon_1 m_{p(0)+1}$. Тогда из (12) и неравенства $\lambda > l_{p(0)+1}(\gamma)\gamma \geq m_{p(0)+1}(\gamma)(1-C\gamma)\gamma$ получаем

$$\int_0^\lambda \frac{n\big(\lambda,y,\Lambda^2(\gamma,1)\big) - n\big(\lambda,y,\Lambda^1(\gamma,1)\big)}{y(1+y/\lambda)}\,dy \leq \leq 2\varepsilon_1\lambda + 2a\big(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\big). \quad (19)$$

Таким образом, из (10), (11), (13), (15) и (17)–(19) следует, что

$$-I(\lambda,\gamma) \leq \frac{\varepsilon\lambda}{8} + \sum_{j=3}^{s} \frac{\varepsilon_1\lambda}{s+1-j} + 8\varepsilon_1\lambda + 3a\big(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\big), \lambda \notin E(\gamma,\varepsilon_1), \big|\lambda - \eta_j\big| \geq \tilde{\delta}\gamma, \eta_j \in \Lambda^2(\gamma).$$

В силу (19) и (5) имеем:

$$(s-2)\varepsilon_1\lambda \leq \sum_{p=p(3)+1}^{p(0)} \big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\big) \leq \leq n(0,\lambda,\Lambda^1) \leq C\lambda.$$

Согласно формуле Эйлера найдется абсолютная постоянная $B > 0$ такая, что

$$\sum_{j=3}^{s} \frac{1}{s+1-j} \leq \ln(s-2) + B - 8.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$-I(\lambda,\gamma) \leq \frac{\varepsilon\lambda}{8} + \varepsilon_1\lambda\left(\ln\frac{C}{\varepsilon_1} + B\right) + 3a\big(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\big), \lambda \notin E(\gamma,\varepsilon_1), \big|\lambda - \eta_j\big| \geq \tilde{\delta}\gamma, \eta_j \in \Lambda^2(\gamma). \quad (20)$$

5. На пятом этапе несколько «подправим» функцию $L_1(\lambda)$ так, чтобы погасить возможные «всплески» $\ln|L_1(\lambda)|$ на множестве $E(\gamma,\varepsilon_1)$. Для этого необходимо специальным образом пополнить последовательность Λ^1. Отметим вначале, что имеет место вложение

$$E(\gamma,\varepsilon_1) \subset \bigcup_{p\in P(\varepsilon_1)} \begin{pmatrix} m_p(\gamma)\gamma\big(1-\theta(\gamma)\big), \\ m_p(\gamma)\gamma\big(1+\theta(\gamma)\big) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

где $\theta(\gamma) = 8C^2\gamma\varepsilon^{-1}$. Здесь мы считаем, что $2C\varepsilon^{-1} \geq 1$. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta(p,\alpha,\gamma)$ – целая часть $\alpha m_p(\gamma)\gamma$. Через $\Lambda^3(\gamma,\alpha,\varepsilon_1)$ обозначим последовательность, состоящую из точек $m_p(\gamma)\gamma, p \in P(\varepsilon_1)$, каждая из которых встречается в ней ровно $\beta(p,\alpha,\gamma)$ раз. Рассмотрим функцию

$$L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1) = = \prod\nolimits_{p\in P(\varepsilon_1)} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{m_p(\gamma)\gamma}\right)^2\right)^{\beta(p,\alpha,\gamma)}.$$

Пусть $p \in P(\varepsilon_1)$. Согласно (5) и определению $P(\varepsilon_1)$ имеем:

$$Cm_p(\gamma)\gamma \geq n\big(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^1\big) \geq \geq \sum_{j\leq p, j\in P(\varepsilon_1)} \varepsilon_1 m_j(\gamma)\gamma.$$

Отсюда следует, что

$$n\Big(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^3(\gamma,\alpha,\varepsilon_1)\Big) = \sum_{j\leq p, j\in P(\varepsilon_1)} \beta(j,\alpha,\gamma) \leq \leq \sum_{j\leq p, j\in P(\varepsilon_1)} \alpha m_j(\gamma)\gamma \leq \frac{\alpha C m_p(\gamma)\gamma}{\varepsilon_1}.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n\big(0,r,\Lambda^3(\gamma,\alpha,\varepsilon_1)\big)}{r} = = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n\Big(0, m_p(\gamma)\gamma, \Lambda^3(\gamma,\alpha,\varepsilon_1)\Big)}{m_p(\gamma)\gamma} \leq \frac{\alpha C}{\varepsilon_1} = B(\alpha,\varepsilon_1).$$

Следовательно(см. [3], гл. II, §2, лемма 2.2), для некоторого $A(\alpha,\varepsilon_1) > 0$ верно неравенство

$$\ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| \leq A(\alpha,\varepsilon_1) + +2\pi B(\alpha,\varepsilon_1)|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (22)$$

Пусть $\beta \in (0,1)$. По лемме 1 имеем также оценку

$$\ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| \geq \ln|L_3(0,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| - -b(\beta)(A(\alpha,\varepsilon_1) + 24\pi B(\alpha,\varepsilon_1)|\lambda|), \lambda \notin E^3(\beta), \quad (23)$$

где $E^3(\beta) = \bigcup B_i^3$ центрировано с нулевым множеством функции L_3 и имеет линейную плотность не выше чем β.

Для $p \in P(\varepsilon_1)$ рассмотрим функцию $g_p(\lambda) = L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)\big(1-\lambda/m_p(\gamma)\gamma\big)^{-\beta(p,\alpha,\gamma)}$. Она целая и на окружности $S\big(m_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma\big)$ также удовлетворяет оценке (22). Тогда при помощи несложных оценок и принципа максимума модуля получаем

$$\ln\left|g_p(\lambda)\right| \le A(\alpha,\varepsilon_1) + 8\pi B(\alpha,\varepsilon_1)|\lambda|,$$
$$\lambda \in B\left(m_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma/2\right).$$

Пусть $\gamma > 0$ такое, что $\theta(\gamma) < 1/2$. Тогда для всех $\lambda \in B\left(m_p(\gamma)\gamma, \theta(\gamma)m_p(\gamma)\right)$ имеем:

$$\ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| =$$
$$= \ln\left|g_p(\lambda)\right| + \beta(p,\alpha,\gamma)\ln\left|1-\lambda/m_p(\gamma)\gamma\right| \le$$
$$\le A(\alpha,\varepsilon_1) + 8\pi B(\alpha,\varepsilon_1)|\lambda| +$$
$$+\left(\alpha m_p(\gamma)\gamma - 1\right)\ln\theta(\gamma) \le$$
$$\le A(\alpha,\varepsilon_1) + 8\pi B(\alpha,\varepsilon_1)|\lambda| + (\alpha|\lambda|/2-1)\ln\theta(\gamma).$$

Отсюда с учетом (9), (14) и (21) получаем

$$\ln|L_1(\lambda)| + \ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| \le \ln|L_2(\lambda,\gamma)| +$$
$$+A(\alpha,\varepsilon_1,\gamma) + B(\alpha,\varepsilon_1,\gamma)\lambda + 3a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right),$$
$$\lambda \ge R, \left|\lambda-\eta_j\right| \ge \tilde{\delta}\gamma\,, \eta_j \in \Lambda^2(\gamma),$$
$$\lambda \in E(\gamma,\varepsilon_1). \qquad (24)$$

где $A(\alpha,\varepsilon_1,\gamma) = A(\alpha,\varepsilon_1) - \ln\theta(\gamma), B(\alpha,\varepsilon_1,\gamma) = 8\pi B(\alpha,\varepsilon_1) + 7C + C_3 d(\gamma) + \alpha\ln\theta(\gamma)/2$. Кроме того, в силу (9), (20) и (22) верно неравенство

$$\ln|L_1(\lambda)| + \ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)|$$
$$\le \ln|L_2(\lambda,\gamma)| + A(\alpha,\varepsilon_1)$$
$$+ \tilde{B}(\alpha,\varepsilon_1,\gamma)\lambda + 3a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right),$$
$$\lambda \ge R, \left|\lambda-\eta_j\right| \ge \tilde{\delta}\gamma, \eta_j \in \Lambda^2(\gamma),$$
$$\lambda \notin E(\gamma,\varepsilon_1). \qquad (25)$$

где $\tilde{B}(\alpha,\varepsilon_1,\gamma) = \varepsilon/8 + \varepsilon_1(\ln(C/\varepsilon_1) + B) + C_3 d(\gamma) + 2\pi B(\alpha,\varepsilon_1)$.

6. На последнем этапе построим требуемую функцию f. Для этого вначале определим еще две вспомогательные функции. Положим $\Lambda^4(\gamma) = \cup_p \Lambda_p^4(\gamma)$, где $\Lambda_p^4(\gamma) = \emptyset$, если $m_p(\gamma) = l_{p+1}(\gamma)$, и $\Lambda_p^4(\gamma) = \left\{\left(m_p(\gamma)+1/2\right)\gamma, \dots, \left(l_{p+1}(\gamma)-1/2\right)\gamma\right\}$ в противном случае. Положим еще $\Lambda^5(\gamma) = \Lambda^2(\gamma) \cup \Lambda^4(\gamma)$, $\Lambda^6(\gamma) = \Lambda^1 \cup \Lambda^3(\gamma,\alpha,\varepsilon_1) \cup \Lambda^4(\gamma)$ и

$$L_5(\lambda,\gamma) = \prod\nolimits_{\eta_j \in \Lambda^5(\gamma)} \left(1 - \frac{\lambda^2}{{\eta_j}^2}\right),$$
$$\tilde{f}(\lambda) = \prod\nolimits_{\eta_j \in \Lambda^6(\gamma)} \left(1 - \frac{\lambda^2}{{\eta_j}^2}\right).$$

Нетрудно заметить, что $\Lambda^5(\gamma)$ имеет плотность $1/\gamma$ ($n\left(0,r,\Lambda^4(\gamma)\right)/r \to 1/\gamma$) и является регулярной (расстояние между ее элементами $\ge \gamma/2$). Поэтому (см. [2], гл. I, §2, теорема 1.2.9 и [4], гл. II, §1, теорема 5) для каждого $\tilde{\delta} > 0$ и некоторого $r\left(\tilde{\delta}\right) > 1$ верна оценка

$$|\ln|L_5(\lambda,\gamma)| - \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma| \le \varepsilon|\lambda|/8,$$
$$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\left(B\left(0, r\left(\tilde{\delta}\right)\right) \cup E^5\left(\tilde{\delta}\right)\right), \qquad (26)$$

где $E^5\left(\tilde{\delta}\right) = \cup_{\mp\eta_j \in \Lambda^5(\gamma)} B\left(\eta_j, \tilde{\delta}\gamma\right)$.

Фиксируем последовательно $\varepsilon_1, \beta, \alpha, \gamma > 0$ такие, что

$$\varepsilon_1(\ln(C/\varepsilon_1) + B) < \varepsilon/8, \qquad (27)$$
$$\beta < \delta/72, \qquad (28)$$
$$8\pi B(\alpha,\varepsilon_1) < \varepsilon/8\,, 24b(\beta)\pi B(\alpha,\varepsilon_1) < \varepsilon/8, \qquad (29)$$
$$\gamma < 1/4C\,, \theta(\gamma) < 1/2\,, 7C + \alpha\ln\theta(\gamma)/2 < 0, C_2\sqrt{d(\gamma)} < \varepsilon/8,$$
$$C_3 d(\gamma) < \varepsilon/8\,, \sqrt[4]{d(\gamma)} < \delta/72. \qquad (30)$$

Тогда из (24)–(27), (29) и (30) получаем:

$$\ln\left|\tilde{f}(\lambda)\right| \le A(\alpha,\varepsilon_1,\gamma) + \varepsilon\lambda/2 + \varepsilon/32 +$$
$$+3a\left(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}\right) \le 5\varepsilon\lambda/8, \qquad (31)$$

для всех $\lambda \notin E^5\left(\tilde{\delta}\right)$, $\lambda \ge R\left(\alpha,\varepsilon_1,\gamma,\tilde{\delta}\right) \ge \max\left\{R, r\left(\tilde{\delta}\right)\right\}$. Отсюда следует, что

$$h_{\tilde{f}}(\lambda) \le 2\varepsilon\lambda/3\,, \lambda \ge 0. \qquad (32)$$

Действительно, в противном случае согласно теореме В. Бернштейна (см. [4], гл. I, §18, теорема 31) найдутся $\tau > 0$ и последовательность $0 < r_n \to \infty$ такие, что на каждом интервале $(r_n, (1+\tau)r_n)$ неравенство

$$\ln\left|\tilde{f}(\lambda)\right| > 5\varepsilon\lambda/8 \qquad (33)$$

выполняется всюду, кроме, быть может, некоторого множества, мера которого не превосходит $\tau r_n/2$. С другой стороны, мера множества $E^5\left(\tilde{\delta}\right) \cap (r_n, (1+\tau)r_n)$ не превосходит $2\tilde{\delta}\gamma(\tau r_n/\gamma + 1)$. Следовательно, при $\tilde{\delta} < 1/4$ для каждого достаточно большого n на интервале $(r_n, (1+\tau)r_n)$ найдется точка λ, в которой выполнено (31) и (33). Получили противоречие. Таким образом, (32) верно.

Определим, наконец, функцию f. Положим $\Lambda^7(\gamma) = \Lambda^3(\gamma,\alpha,\varepsilon_1) \cup \Lambda^4(\gamma)$ и

$$f(\lambda) = L(\lambda)\prod\nolimits_{\eta_j \in \Lambda^7(\gamma)} \left(1 - \frac{\lambda^2}{{\eta_j}^2}\right)$$

(считаем, что каждому $\lambda_k \in \Lambda$ соответствует n_k одинаковых сомножителей). Как и выше, f является целой функцией экспоненциального типа. Она обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k. Пусть $\varepsilon' > 0$. В силу непрерывности функции $h_{\tilde{f}}$ найдется $\tau \in (0,1)$ такое, что $h_{\tilde{f}}(\lambda) \le h_{\tilde{f}}(1) + \varepsilon', \lambda \in B(1,\tau)$. Тогда (см. [4], гл. I, §18, теорема 28) для некоторого $R' > 0$ верно неравенство

$$\ln\left|\tilde{f}(t\lambda)\right| \le h_{\tilde{f}}(t) + 2\varepsilon' t, t \ge R',$$
$$\lambda \in B(1,\tau). \qquad (34)$$

В силу (3) для каждого $d \in (0, 1/2)$

$$\ln|f(\lambda)| - \ln\left|\tilde{f}(\lambda)\right| \le C_1\sqrt{d}|\lambda|,$$
$$\lambda \in \mathbb{C}\backslash E^1(d), \qquad (35)$$

где $E^1(d) = \cup B(y_i, q_i)$ имеет линейную плотность не выше чем $\sqrt[4]{d}$. Выберем d так, что $C_1\sqrt{d} \le \varepsilon'$ и $\sqrt[4]{d} \le \tau/6$. Тогда для некоторого $r' > 0$ и каждого $r \ge r'$ верно неравенство $\sum_{|y_i|<r} q_i \le \tau r/5$.

Пусть $r \ge r'$ и $B(y_i, q_i)$ пересекает $B(0,r)$. Если $|y_i| \ge r$, то согласно предыдущему $q_i \le \tau|y_i|/5$. Поэтому $(1-\tau/5)|y_i| < r$. Отсюда имеем: $|y_i| < 5r/4$. Таким образом, сумма радиусов всех кругов $B(y_i, q_i)$, которые пересекают $B(0,r)$ не превышает $\tau r/4$.

Пусть $\lambda \ge r'$. По доказанному сумма диаметров кругов $B(y_i, q_i)$, которые пересекают $B(\lambda, \tau\lambda)$ не превышает $\tau(1+\tau)\lambda/2 < \tau\lambda$. Следовательно, найдется $\tau' \in (0, \tau\lambda)$ такое, что окружность $S(\lambda,\tau')$ не пересекает множество $E^1(d)$. Тогда согласно (34) и (35) с учетом выбора d и принципа максимума модуля получаем: $\ln|f(\lambda)| \le \varepsilon'(1+\tau)\lambda + h_{\tilde{f}}(\lambda) + 2\varepsilon'\lambda$. Поскольку $\varepsilon' > 0$ произвольное, то отсюда и из (32) следует, что

$$h_f(\lambda) \le 2\varepsilon\lambda/3\,, \lambda \ge 0. \qquad (36)$$

Выберем теперь $d \in (0,1/2)$ и $\tilde{\delta} > 0$ так, что $C_1\sqrt{d} < \varepsilon/8$, $\sqrt[4]{d} < \delta/72$ и линейная плотность $E^5(\tilde{\delta})$ не превышает $\delta/72$. Положим

$$E = E^1(d) \cup E^2(\gamma) \cup E^3(\beta) \cup E^5(\tilde{\delta}).$$

(Очевидно, можно считать, что E симметрично относительно нуля.) Тогда с учетом (28) и (30) верно неравенство $p_E \le \delta/18$. Поэтому, как и выше, найдется $r" > 0$ такое, что при $r \ge r"$сумма диметров всех кругов из E, имеющих непустое пересечение с $B(0,(1+\delta)r)$, строго меньше $\delta r/3$. Пусть $r_0 > r"$. Тогда для каждого $i \ge 1$ на интервале $((1+\delta/3)^{i-1}r_0, (1+\delta/3)^i r_0)$ есть число t_i, для которого окружность $S(0,t_i)$ не пересекает E. В силу выбора имеем: $t_{i+1} > t_i > (1+\delta/3)^{i-1}r_0 \to \infty$ при $i \to \infty$ и $t_{i+1} < (1+\delta/3)^{i+1}r_0 < (1+\delta/3)^2 t_i < (1+\delta)t_i$. Остается показать, что выполнены (1) и (2).

Согласно выбору d и неравенствам (3), (8), (22), (23), (26) и (29) найдется $\tilde{r} \ge r(\tilde{\delta})$ такое, что

$$|\ln|f(\lambda)| - \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma| \le 2\varepsilon|\lambda|/3,$$
$$\lambda \in \mathbb{C}\backslash(B(0,\tilde{r}) \cup E). \qquad (37)$$

Покажем, что часть E, лежащая вне достаточно большого круга с центром в нуле, вложена в $\Gamma(\delta)$. Поскольку все функции, участвующие в доказательстве четные, то можно считать, что E симметрично относительно нуля. Поэтому достаточно рассмотреть часть E, расположенную в правой полуплоскости. Она центрирована с множеством $\Lambda" = \Lambda \cup \Lambda^1 \cup \Lambda^2(\gamma) \cup \Lambda^3(\gamma,\alpha,\varepsilon_1) \cup \Lambda^4(\gamma)$. Все его составляющие кроме первой лежат на положительной полуоси. Т.к. Λ является почти вещественной, то найдется $\tilde{r}_1 \ge \max\{\tilde{r}, r"\}$ такое, что $|\mathrm{Im}\lambda_k| < \delta\mathrm{Re}\lambda_k/6$ для всех k с условием $|\lambda_k| \ge \tilde{r}_1$. Пусть $B(y,q)$ – круг из E, который содержит точку z' с модулем $\ge (1+\delta)\tilde{r}_1$. Тогда $B(y,q) \subset \mathbb{C}\backslash B(0,\tilde{r}_1)$ (в противном случае по доказанному выше $2q < \delta\tilde{r}_1/3$ и, следовательно, $B(y,q) \subset B(0,(1+\delta)\tilde{r}_1)$). Поэтому в силу выбора $r"$ верно неравенство $q < \delta|y|/6$. В круге $B(y,q)$ имеется точка $\varsigma \in \Lambda"$. Поскольку $\varsigma \in B(y,q)$, то $|\varsigma| \ge \tilde{r}_1$ и $|\varsigma| \ge (1-\delta/6)|y|$. Согласно выбору $\tilde{r}_1$ имеем: $|\mathrm{Im}\varsigma| < \delta\mathrm{Re}\varsigma/6$. Таким образом, для любого $\eta \in B(y,q)$ получаем:

$$|\eta - \mathrm{Re}\varsigma| \le |\eta - y| + |y - \varsigma| + |\varsigma - \mathrm{Re}\varsigma| \le$$
$$\le \delta|y|/6 + \delta|y|/6 + \delta\mathrm{Re}\varsigma/6 \le$$
$$\le \delta|\varsigma|/\big(3(1-\delta/6)\big) + \delta\mathrm{Re}\varsigma/6 \le$$
$$\le \delta(1+\delta/6)\mathrm{Re}\varsigma/\big(3(1-\delta/6)\big) +$$
$$+\delta\mathrm{Re}\varsigma/6 < \delta\mathrm{Re}\varsigma.$$

Отсюда следует, что $E\backslash B(0,(1+\delta)\tilde{r}_1) \subset \Gamma(\delta)$. Фиксируем $r_0 > (1+\delta)\tilde{r}_1$. Тогда на окружностях $S(0,t_i), i \ge 1$, выполнено *(37)*. Это завершает доказательство *(1)*.

Докажем *(2)*. Рассмотрим функцию $h(\lambda) = h_f(\lambda) - 2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda/3 - 2\varepsilon\mathrm{Im}\lambda/3 - \pi\mathrm{Im}\lambda/\gamma$. Мнимая ось лежит вне $\Gamma(\delta)$. Поэтому в силу *(36)* и *(37)* имеем: $h(t) \le 0, h(it) \le 0, t \ge 0$. Поскольку $h(\lambda)$ – выпуклая функция, то в первом квадранте верно неравенство

$$h_f(\lambda) \le \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma + 2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda/3 + 2\varepsilon\mathrm{Im}\lambda/3$$
$$\le \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma + \varepsilon|\lambda|.$$

Аналогичное неравенство имеет место и в четвертом квадранте, а с учетом четности f и во всей плоскости. Теорема доказана.

Замечания. 1. В формулировке теоремы 31 из главы I книги [4] (теорема В. Бернштейна), которая цитировалась выше, имеется неточность. Там $\varepsilon, \delta > 0$ считаются произвольными. В действительности $\varepsilon > 0$ может быть произвольным, а $\delta > 0$ лишь существует и зависит от ε. Именно в такой редакции эта теорема и доказана. Выше она использовалась также в этой редакции. Отметим, что в английской версии [5] книги [4] теорема В. Бернштейна сформулирована верно.

2. Схема доказательства теоремы 2 (этапы 2.3,6) заимствована из работы [6] (лемма 9). На этапах 4.5 использовался прием, изложенный при доказательстве теоремы 8.3 из работы [7].

3. Предположим, что в теореме 2 наложено дополнительное условие:

$$M(\Lambda) = \lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\, n(\lambda,\delta|\lambda|,\Lambda)/|\lambda|$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\, n(\lambda_k,\delta|\lambda_k|,\Lambda)/|\lambda_k| = 0.$$

Тогда никаких «всплесков» у функции $\ln|L_1(\lambda)|$ на множестве $E(\gamma,\varepsilon_1)$ нет. Таким образом, этап 5 становится лишним, и в качестве искомой функции f можно взять произведение $L(\lambda)L_4(\lambda)$, где L_4 построена по $\Lambda^4(\gamma)$ также как L_2 по $\Lambda^2(\gamma)$. Действительно, пусть $\lambda \in \Big(l_p(\gamma)\gamma, m_p(\gamma)\gamma(1+4Cd(\gamma)\varepsilon^{-1})\Big), p \in P(\varepsilon_1)$. В силу *(12)* второе слагаемое в *(10)* не превосходит величины $2a(\lambda,\gamma,\tilde{\delta}) + 2d(\gamma)\lambda$.

Пусть $\tilde{p}$ – минимальный номер, для которого $m_{\tilde{p}}(\gamma)\gamma \le (1-4Cd(\gamma)\varepsilon^{-1})\lambda$. Тогда для достаточно малого γ и достаточно большого $\lambda > 0$ имеем:

$$\sum_{p=\tilde{p}+1}^{p(0)} a_p(\lambda,\gamma) \le \sum_{p=\tilde{p}+1}^{p(0)} \frac{2\lambda - m_p(\gamma)\gamma}{\gamma} \times$$
$$\times \ln\left(1 + \frac{m_p(\gamma)\gamma - l_p(\gamma)\gamma}{2\lambda - m_p(\gamma)\gamma}\right) \le$$
$$\le \sum_{p=\tilde{p}+1}^{p(0)} \Big(m_p(\gamma) - l_p(\gamma)\Big) \le$$
$$\le n(\lambda,(4C\varepsilon^{-1}+1)d(\gamma)\lambda,\Lambda) \le \varepsilon\lambda/8.$$

Оценка оставшейся суммы $\sum_{p=1}^{\tilde{p}} a_p(\lambda,\gamma)$ производится также как в *(15)*. Таким образом, в этом случае мы получаем требуемое неравенство сверху на $\ln|L_1(\lambda)|$ без построения дополнительной функции L_3. При этом выкладки существенно упрощаются.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следуя работе [8], положим

$$q_\Lambda(\lambda,w,\delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

В случае, когда круг $B(w,\delta|w|)$ не содержит ни одной λ_k, полагаем $q_\Lambda(\lambda,w,\delta)\equiv 1$. Модуль $q_\Lambda(\lambda,w,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k\in B(w,\delta|w|)$ около λ. Величина $\ln|q_\Lambda(\lambda,w,\delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от $\lambda_k\in B(w,\delta|w|)$ до λ. Если $\delta\in(0,1)$, то модуль каждого сомножителя q_Λ в круге $B(w,\delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2\big(3(1-\delta)\big)^{-1}$. Поэтому для $\delta\in(0,1/3)$ он не превосходит единицы. Кроме того, если $\delta_1\le\delta_2$ и $B(w_1,\delta_1|w_1|)\subseteq B(w_2,\delta_2|w_2|)$, то число сомножителей $q_\Lambda(z,w_1,\delta_1)$ не больше числа сомножителей $q_\Lambda(z,w_2,\delta_2)$, и каждый из сомножителей $q_\Lambda(z,w_1,\delta_1)$ по модулю не меньше соответствующего сомножителя $q_\Lambda(z,w_2,\delta_2)$. Таким образом, $|q_\Lambda(z,w_1,\delta_1)|\ge|q_\Lambda(z,w_2,\delta_2)|, z\in B(w_2,\delta_2|w_2|)$. Введем еще функцию

$$q_\Lambda^m(\lambda,\delta)=\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),k\ne m}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k},\ m\ge 1.$$

Если круг $B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|)$ не содержит точек $\lambda_k, k\ne m$, то $q_\Lambda^m(z,\delta)\equiv 1$. Положим (см. [8])

$$\mathcal{S}_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{m\to\infty}\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|/|\lambda_m|.$$

Предел по $\delta\to 0$ существует, т.к. согласно сказанному выше функция, стоящая под знаком предела, не убывает при $\delta\to 0$. Кроме того, она не положительна, поэтому $\mathcal{S}_\Lambda\le 0$. Величина $\mathcal{S}_\Lambda$ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна (см., например, [3], гл. II, §5, п. 2), но при этом эффективна (в отличие от индекса конденсации Бернштейна) для любой комплексной последовательности (а не только для измеримой положительной последовательности и комплексной последовательности нулевой плотности). Отметим еще, что коэффициент 3 при определении q_Λ выбран лишь для удобства (см. замечание к теореме 5.1 в работе [8]). Он обеспечивает неравенство $\mathcal{S}_\Lambda\le 0$.

Равенство $\mathcal{S}_\Lambda=0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Характер этой отделенности проясняется в лемме 2.3 работы [9]. Сформулируем ее в частном случае и в удобной для нас форме. Но прежде введем необходимые обозначения.

Пусть $\theta\in(0,1)$. Для каждого $k\ge 1$ через β_k обозначим минимальное расстояние от λ_k до точек $\lambda_m, m\ne k$. Фиксируем $k\ge 1$. Если $n_k\le\beta_k/2$, то положим $\gamma_k(\theta)=\theta n_k$. В противном случае полагаем $\gamma_k(\theta)=\theta\beta_k/2$.

Нетрудно заметить, что $\varlimsup_{k\to\infty} n_k/|\lambda_k|\le\overline{n}(\Lambda)$. Поэтому согласно лемме 2.3 из работы [9] (с учетом определения чисел $\gamma_{m,l}$ в начале ее доказательства) верно утверждение

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ *имеет конечную верхнюю плотность и* $\mathcal{S}_\Lambda=0$. *Тогда для каждых* $\varepsilon>0,\theta\in(0,1)$ *существуют* $R>0$ *и* $\delta\in(0,1/3)$ *такие, что для всех* $|w|\ge R$ *и* $k\ge 1$ *верно неравенство*

$$\ln|q_\Lambda(\lambda,w,\delta)|\ge-\varepsilon|\lambda|,$$
$$\lambda\in B\big(\lambda_k,\gamma_k(1)\big)\backslash B\big(\lambda_k,\gamma_k(\theta)\big)\cap B(w,\delta|w|).$$

В дальнейшем под контуром будем понимать простую замкнутую непрерывную спрямляемую кривую.

Теорема 4. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ *– почти вещественная последовательность,* $\overline{n}(\Lambda)<+\infty$ *и* $\mathcal{S}_\Lambda=0$. *Тогда для любых* $\varepsilon_0>0,\delta_0\in(0,1/3)$ *существуют* $\gamma>0$, *целая функция экспоненциального типа* f, *номер* k_0 *и числа* $r_k\in(0,\delta_0|\lambda_k|), k\ge k_0$, *такие, что*

f *обращается в ноль в точках* $\lambda_k, k\ge 1$, *с кратностью не меньшей чем* n_k;

для всех $k\ge k_0$ *в круге* $B(\lambda_k,r_k)$ *нет точек из* Λ, *отличных от* λ_k

$\ln|f(\lambda)\,|\ge\pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma-\varepsilon_0|\lambda|, \lambda\in S(\lambda_k,r_k), k\ge k_0$;

$h_f(\lambda)\le\pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma+\varepsilon_0|\lambda|, \lambda\in\mathbb{C}$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon_0>0,\delta_0\in(0,1/3)$ и пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. По условию $\mathcal{S}_\Lambda=0$. Тогда согласно лемме 3 найдутся номер k_1 и $\delta_1\in(0,\delta_0)$ такие, что

$$\ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta_1)|\ge-\varepsilon|\lambda|,$$
$$\lambda\in B\big(\lambda_k,\gamma_k(1)\big)\backslash B\big(\lambda_k,\gamma_k(1/4)\big),\qquad(38)$$

если $\gamma_k(1)<\delta_1|\lambda_k|$ и $k\ge k_1$.

Пусть $\varepsilon_1>0$ удовлетворяет условию *(27)*, где постоянные C,B те же, что и в теореме 2. Выберем $s>2$ такое, что $\varepsilon_1\ln(2/s)<-2\varepsilon$. Фиксируем $\delta\in(0,\delta_1/s)$. Пусть f – функция, построенная для чисел $\varepsilon_1,\beta,\alpha,\gamma>0$, удовлетворяющих неравенствам *(27)*–*(30)*, к которым добавлено еще одно: $\theta(\gamma)<\delta_1/2s$. Тогда пункты 1), 4) выполнены. Остается определить номер k_0 числа $r_k\in(0,\delta_0|\lambda_k|), k\ge k_0$, так, что будут выполнены пункты 2) и 3).

Как и в теореме 2 найдется $k_0\ge k_1$ такой, что при $k\ge k_0$ сумма диметров всех кругов из E, имеющих непустое пересечение с $B(0,(1+\delta)|\lambda_k|)$, строго меньше $\delta r/3$. Увеличивая при необходимости k_0, можно считать, что $|\lambda_k|\ge(1-\delta_1)^{-1}\tilde{r}, k\ge k_0$, где $\tilde{r}$ такое же как в *(37)*.

Фиксируем $k\ge k_0$. Рассмотрим две возможные ситуации. 1. В круге $B(\lambda_k,\delta_1|\lambda_k|/s)$ нет точек последовательности Λ, отличных от λ_k. В силу выбора k_0 найдется $r_k\in(0,\delta|\lambda_k|)\subset(0,\delta_0|\lambda_k|)$ такое, что на окружности $S(\lambda_k,r_k)$ имеет место оценка *(37)*. Таким образом, в этом случае с учетом выбора δ получаем пункты 2) и 3).

2. В круге $B(\lambda_k,\delta_1|\lambda_k|/s)$ есть точка последовательности Λ, отличная от λ_k. Тогда $\gamma_k(1)<\delta_1|\lambda_k|/2s$. Также как и *(37)* получаем

$$\ln|f(\lambda)\,|-\ln|L_5(\lambda,\gamma)|\ge-\varepsilon|\lambda|,$$
$$\lambda\in\mathbb{C}\backslash\big(B(0,\tilde{r})\cup E^1(d)\cup E^2(\gamma)\cup E^3(\beta)\big).\ (39)$$

Кроме того, в силу (2.26) можно считать, что

$$\ln|L_5(\lambda,\gamma)|-\pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma\ge-\varepsilon|\lambda|,$$
$$\lambda\in\mathbb{C}\backslash\Big(B(0,\tilde{r})\cup E^5\big(\tilde{\delta}\big)\Big).\qquad(40)$$

Напомним, что числа d и $\tilde{\delta}$ выбраны перед определением множества E в теореме 2.2. Согласно выбору $\tilde{\delta}$ верно неравенство $\tilde{\delta}\gamma < \gamma/8 < 1/8$.

Как и выше, найдем $\tilde{r}_k \in (2\delta_1|\lambda_k|/3s, \delta_1|\lambda_k|/s)$ такое, что окружность $S(\lambda_k, \tilde{r}_k)$ не пересекает исключительное множество в *(39)*. Тогда

$$\ln|f(\lambda)| - \ln|L_5(\lambda,\gamma)| \geq -\varepsilon|\lambda|, \lambda \in S(\lambda_k, \tilde{r}_k).$$

Поскольку Λ – почти вещественная последовательность, то увеличивая при необходимости k_0, можно считать, что $|\lambda| \leq 2\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|/s)$. Поэтому, вспоминая определения функций f и L_5, получаем

$$\ln|L(\lambda)| + \ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| \geq \ln|L_2(\lambda,\gamma)| - 2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda, \quad \lambda \in S(\lambda_k, \tilde{r}_k). \tag{41}$$

Кроме того, можно также считать, что $\gamma_k(1) + 2 < \delta_1|\lambda_k|/2s + 2 < 2\delta_1|\lambda_k|/3s$. Тогда $\ln|\lambda - \eta_i| \geq 0, \lambda \in S(\lambda_k, \tilde{r}_k), i \in I(k)$. Здесь $I(k)$ – набор всех индексов i, для которых круг $B(\eta_i, \tilde{\delta}\gamma)$ с центром в нуле $\eta_j \in \Lambda^2(\gamma)$ функции L_2 пересекает $B(\lambda_k, \gamma_k(1))$. В силу *(41)*

$$\ln|L(\lambda)| + \ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| \geq \ln|L_2(\lambda,\gamma)| - \ln|\lambda - \eta_i| - 2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda, \quad \lambda \in S(\lambda_k, \tilde{r}_k), i \in I(k). \tag{42}$$

Круги $B(\eta_i, \tilde{\delta}\gamma), \eta_j \in \Lambda^5(\gamma)$, попарно не пересекаются, т.к. $\tilde{\delta}\gamma < \gamma/8$. Поэтому из *(40)* следует оценка

$$\ln|L_5(\lambda,\gamma)| - \ln|\lambda - \eta_i| \geq \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma - 2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in S(\eta_i, \tilde{\delta}\gamma), i \in I(k).$$

Функция, стоящая слева, является гармонической в круге $B(\eta_i, \tilde{\delta}\gamma)$. Поэтому

$$\ln|L_5(\lambda,\gamma)| - \ln|\lambda - \eta_i| \geq \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma - -2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \overline{B(\eta_i, \tilde{\delta}\gamma)}, \in I(k). \tag{43}$$

Предположим, что некоторый нуль $m_p(\gamma)\gamma, p \in P(\varepsilon_1)$, функции L_3 лежит в круге $B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|/s)$. Тогда все элементы группы $\Lambda_p^1(\gamma)$ принадлежат $B(\lambda_k, 7\delta_1|\lambda_k|/4s)$, т.к. $\theta(\gamma) < \delta_1/2s$. Их число $\geq \varepsilon_1 m_p(\gamma)\gamma$. Поскольку Λ – почти вещественная последовательность, то согласно определению Λ^1 можно считать, что с учетом кратностей круг $B(\lambda_k, 2\delta_1|\lambda_k|/s)$ содержит не менее чем $\varepsilon_1 m_p(\gamma)\gamma$ точек λ_m.

Если $\lambda, \lambda_m \in B(\lambda_k, 2\delta_1|\lambda_k|/s) \subset B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|)$, то

$$\left|\frac{\lambda - \lambda_m}{3\delta_1|\lambda_m|}\right| \leq \frac{4\delta_1|\lambda_k|}{3s\delta_1|\lambda_m|} \leq \frac{4|\lambda_k|}{3s(1-2\delta_1/s)|\lambda_k|} \leq \frac{2}{s}.$$

Тогда с учетом выбора числа s для всех $\lambda \in B(\lambda_k, 2\delta_1|\lambda_k|/s)$ получаем

$$\ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta_1)| \leq \varepsilon_1 m_p(\gamma)\gamma\ln(2/s) < -2\varepsilon(1-\delta_1/s)(1+2\delta_1/s)^{-1}|\lambda| \leq -5\varepsilon|\lambda|/4.$$

Это противоречит *(38)*, т.к. $\gamma_k(1) < \delta_1|\lambda_k|/2s$. Таким образом, в круге $B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|/s)$ нет нулей L_3. Поэтому функция $\ln|L(\lambda)| + \ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| - \ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta_1)|$ гармоническая в нем. Тогда в силу неравенства $|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta_1)| < 1, \lambda \in B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|)$, из *(41)* и *(42)* имеем:

$$\ln|L(\lambda)| + \ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| - \ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta_1)| \geq \geq \ln|L_2(\lambda,\gamma)| - 2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in B(\lambda_k, \tilde{r}_k). \tag{44}$$

$$\ln|L(\lambda)| + \ln|L_3(\lambda,\alpha,\gamma,\varepsilon_1)| - \ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta_1)| \geq \geq \ln|L_2(\lambda,\gamma)| - \ln|\lambda - \eta_i| - 2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda, \quad \lambda \in B(\lambda_k, \tilde{r}_k), i \in I(k). \tag{45}$$

Объединяя оценки *(38)*, *(40)* и *(43)–(45)* получаем

$$\ln|f(\lambda)| \geq \pi|\mathrm{Im}\lambda|/\gamma - 5\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in B(\lambda_k, \gamma_k(1))\setminus \setminus \left(B(\lambda_k, \gamma_k(1/4)) \cup E^4(\tilde{\delta})\right), \tag{46}$$

где $E^4(\tilde{\delta}) = \cup_{\eta_j \in \Lambda^4(\gamma)} B(\eta_j, \tilde{\delta}\gamma)$. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0/5)$. Согласно определению $\gamma_k(1)$ в круге $B(\lambda_k, \gamma_k(1))$ нет точек последовательности Λ, отличных от λ_k. Поэтому в силу (2.46) остается найти $r_k \in [\gamma_k(1/4), \gamma_k(1)) \subset (0, \delta_0|\lambda_k|)$ такое, что окружность $S(\lambda_k, r_k)$ не пересекает множество $E^4(\tilde{\delta})$.

Из определений последовательностей Λ^1 и $\Lambda^4(\gamma)$ следует, что расстояние от λ_k до любой точки $\eta_j \in \Lambda^4(\gamma)$ не меньше чем $\gamma/2$. Если $\gamma_k(1/4) \leq \gamma/4$, то окружность $S(\lambda_k, \gamma_k(1/4))$ не пересекает $E^4(\tilde{\delta})$. В этом случае положим $r_k = \gamma_k(1/4)$.

Пусть теперь $\gamma_k(1/4) > \gamma/4$. $B(\lambda_k, \gamma_k(1))$ пересекает не более чем $\gamma_k(1)/\gamma + 1$ кругов из $E^4(\tilde{\delta})$. Сумма их диаметров не превосходит величины

$$(\gamma_k(1)/\gamma + 1)\,\gamma/4 \leq \gamma_k(1)/4 + \gamma/4 \leq \gamma_k(1)/4 + \gamma_k(1/4) = \gamma_k(1)/2.$$

Следовательно, в кольце $B(\lambda_k, \gamma_k(1))\setminus B(\lambda_k, \gamma_k(1/4))$ найдется окружность $S(\lambda_k, r_k)$, которая не пересекает множество $E^4(\tilde{\delta})$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Предположим, что к условиям теоремы 4 добавлено еще одно: $\overline{\lim}_{k\to\infty} n_k/|\lambda_k| = 0$. Вместе с условием $\mathcal{S}_\Lambda = 0$ это дает (см. [9], лемма 2.2) равенство $M(\Lambda) = 0$. Тогда, как отмечалось в замечании 3 к теореме 2, в качестве искомой функции f можно взять произведение $L(\lambda)L_4(\lambda)$.

2. Нетрудно заметить, что сопряженная диаграмма K (см. [3], гл. I,§5, п.2) функции f, построенной в теоремах 2 и 4 содержит начало координат. Действительно, из симметричности нулей f следует неравенство $h_f(\lambda) \geq 0, \lambda \in \mathbb{C}$, а по теореме Полиа (см. [3], гл.I, §5, теорема 5.4) имеет место равенство $h_f(\lambda) = H_K(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$. Здесь

$$H_K(\lambda) = \sup_{z\in K} \mathrm{Re}(\lambda z), \lambda \in \mathbb{C},$$

- опорная функция выпуклого компакта K (точнее говоря, комплексно сопряженного к K компакта).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Максимальной плотностью Λ называется величина

$$n_0(\Lambda) = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(0,r,\Lambda) - n(0,(1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}.$$

Для $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ через $\mathcal{R}^\delta, \delta > 0$, обозначим объединение кругов $B(\lambda, \delta|\lambda|), \lambda \in \mathcal{R}$.

Теорема 5. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – почти вещественная последовательность, $\overline{n}(\Lambda), n_0(\Lambda) < +\infty$ и $\mathcal{S}_\Lambda = 0$. Тогда существует целая функция экспоненциального типа f, удовлетворяющая условиям:*

1) f обращается в ноль в точках $\lambda_k, k \geq 1$, с кратностью не меньшей чем n_k;

2) $h_f(\lambda) \leq \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}$;

3) для любых $\varepsilon > 0, \delta \in (0, 1/3)$ существует $T > 0$ такое, что $\lambda_k \in \mathcal{R}^\delta$, если $|\lambda_k| \geq T$, где $\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ln|f(\lambda)| \geq \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\lambda| - \varepsilon|\lambda|\}$.

Доказательство. Пусть $\Lambda^1 = \{\xi_l\}$ – последовательность, состоящая из модулей $|\lambda_k|$ элементов Λ. При этом каждое число $|\lambda_k|$ встречается в Λ^1 ровно столько раз, какова сумма кратностей точек λ_j с модулем равным $|\lambda_k|$. Тогда верно равенство $n_0(\Lambda) = n_0(\Lambda^1)$. Рассмотрим функции

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\lambda_k}^2}\right)^{n_k}, L_1(\lambda) = \prod_{l=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\xi_l}^2}\right).$$

Как и в теореме 2 для каждого $d \in (0, 1/2)$ найдутся $C_1 > 0$ (не зависящее от d) и объединение кругов $E^1(d)$ такие, что $E^1(d)$ центрировано с нулевыми множествами L и L_1, имеет линейную плотность $\leq \sqrt[4]{d}$ и

$$\left|\ln|L(\lambda)| - \ln|L_1(\lambda)|\right| \leq C_1\sqrt{d}|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash E^1(d). \qquad (47)$$

По теореме Полиа (см., напр., [6], лемма 5) существует последовательность положительных чисел Λ^2 такая, что $\Lambda^3 = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$ имеет плотность $n_0(\Lambda^1)$. Тогда (см. [2], гл. I, §2, теорема 1.2.9 и [4], гл. II, §1, теорема 5) функция

$$L_3(\lambda) = \prod\nolimits_{\eta_j \in \Lambda^3}\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\eta_j}^2}\right)$$

удовлетворяет неравенству

$$\left|\ln|L_3(\lambda)| - \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\lambda|\right| \leq \varepsilon(\lambda)|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash E^3, \qquad (48)$$

где $\varepsilon(\lambda) \to 0, |\lambda| \to \infty$, и E^3 – объединение кругов нулевой линейной плотности. Положим

$$f(\lambda) = L(\lambda)\prod\nolimits_{\eta_j \in \Lambda^2}\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\eta_j}^2}\right).$$

Пункт 1) теоремы выполнен по построению. Докажем 3). Фиксируем $\varepsilon > 0, \delta \in (0, 1/3)$. Выберем $d \in (0, 1/2)$ из условий $\sqrt[4]{d} \leq \delta/18$ и $C_1\sqrt{d} \leq \varepsilon/2$. Также, как в теореме 2, найдем $T_1 > 0$, для которого выполнено следующее. Сумма диметров всех кругов из $E^1(d) \cup E^3$, имеющих непустое пересечение с $B(0, (1+\delta)r), r \geq T_1$, строго меньше $\delta r/3$. Выберем теперь $T > T_1$ такое, что $|\mathrm{Im}\lambda_k| < \delta\mathrm{Re}\lambda_k/3, \mathrm{Re}\lambda_k \geq T_1$, если $|\lambda_k| \geq T$, и $\varepsilon(\lambda) < \varepsilon/2, |\lambda| \geq (1-\delta)T$.

Пусть $|\lambda_k| \geq T$. Тогда найдется $\tau_k \in (0, 1/3)$ такое, что окружность $S(\mathrm{Re}\lambda_k, \tau_k\delta\mathrm{Re}\lambda_k)$ не пересекает множество $E^1(d) \cup E^3$. Поэтому в силу *(47)* и *(48)* имеем:

$$\left|\ln|f(\lambda)| - \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\lambda|\right| \leq \varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in S(\mathrm{Re}\lambda_k, \tau_k\delta\mathrm{Re}\lambda_k). \qquad (49)$$

Таким образом, верно вложение $S(\mathrm{Re}\lambda_k, \tau_k\delta\mathrm{Re}\lambda_k) \subset \mathcal{R}$. Пусть $\lambda \in S(\mathrm{Re}\lambda_k, \tau_k\delta\mathrm{Re}\lambda_k)$. Учитывая выбор T, получаем

$$|\lambda_k - \lambda| \leq |\lambda_k - \mathrm{Re}\lambda_k| + |\mathrm{Re}\lambda_k - \lambda| \leq \leq 2\delta\mathrm{Re}\lambda_k/3 \leq \delta|\lambda|,$$

т.е. $\lambda_k \in \mathcal{R}^\delta$.

Докажем, наконец, 2). Пусть $|\lambda| = 1$ и $\tilde{\varepsilon} > 0$. Выберем $\tilde{\delta} \in (0, 1/3)$ такое, что

$$\pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}w| \leq \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\lambda| + \tilde{\varepsilon}, w \in B(\lambda, \tilde{\delta}).$$

Как и при получении *(49)* найдем $\tilde{T} > 0$ такое, что

$$\left|\ln|f(\xi)| - \pi n_0(\Lambda)|\mathrm{Im}\xi|\right| \leq \tilde{\varepsilon}|\xi|, \quad \xi \in S(t\lambda, \tau(t)\delta t), t \geq \tilde{T},$$

где $\tau(t)$ – некоторое число из интервала $(0, 1/3)$. Отсюда и из предыдущего по принципу максимума модуля получаем:

$$\ln|f(t\lambda)| \leq \pi n_0(\Lambda)t|\mathrm{Im}\lambda| + 3\tilde{\varepsilon}t, t \geq \tilde{T}.$$

В силу произвольности $\tilde{\varepsilon} > 0$ это дает нам пункт 2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красичков И. Ф. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней// Матем. сб. 1966. Т. 70(112). №2. С. 198–231.
2. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
3. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
5. Levin B. Ya. Distribution o f zeros of entire functions. Amer. Math. Soc , Providence , R. I., 1980.
6. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Замкнутость множества сумм рядов Дирихле// Уфимск. матем. журн. 2013. Т.5. №3. С. 96–120.
7. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций.II. Спектральный синтез на выпуклых областях// Матем. сб. 1972. Т. 88(130). №1. С. 3–30.
8. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях// Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т.68. №2. С. 71–136.9.
9. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Базис в инвариантном подпространстве целых функций// Алгебра и анализ. 2015. Т.27. №2. С. 132–195.

Поступила в редакцию 23.11.2016 г.

ON CONSTRUCTION OF SOME SPECIAL INTEGER FUNCTIONS

© O. A. Krivosheeva

Bashkir State University
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

The article is devoted to the construction of integer functions of exponential type, vanishing at the almost real sequences of complex numbers and having increase close to regular. For an arbitrary multiple almost real sequence of complex numbers, the author constructed an integer function of exponential type. The module of the function has a given upper estimate everywhere in the complex plane. In addition, there is a similar lower estimate outside the exceptional set of an arbitrarily small linear density. In this case, the integer function vanishes at the mentioned sequence with a given multiplicity, which coincides with the multiplicity of point as an element of the sequence. The author also considered almost real sequences that have a zero index of condensation. It means that distances between close to each other members of a sequence have special lower estimates. With an additional condition of equality to zero of the condensation index of almost real sequence of complex numbers, an integer function of exponential type is constructed, which has a more accurate asymptotic lower estimates on its growth. The logarithm of the module of this integer function has a specified indicator of growth, which differs arbitrarily little from the support function of vertical segment of the complex plane. Outside of exceptional set of circles, this logarithm has also lower estimates that differ from the upper estimates by a given value. The latter can be considered arbitrarily small. The centers of these circles are the points of the almost real sequence. Each of these circles contains only one point of the sequence that serves as the center of the circle. The radiuses of these circles can be done arbitrarily small compared to the modules of their centers. Moreover, this integer function of exponential type vanishes at all points of the almost real sequence with a given multiplicity. With the additional condition of the finite maximal density of a sequence, the size of the mentioned vertical segment can be considered fixed.

Keywords: integer function of exponential type, linear density, almost real sequence, upper density.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Krasichkov I. F. Matem. sb. 1966. Vol. 70(112). No. 2. Pp. 198–231.
2. Leont'ev A. F. Ryady eksponent [Exponential series]. Moscow: Nauka, 1976.
3. Leont'ev A. F. Tselye funktsii. Ryady eksponent [Integer functions. Exponential series]. Moscow: Nauka, 1983.
4. Levin B. Ya. Raspredelenie kornei tselykh funktsii [The distribution of roots of integer functions]. M., Gostekhizdat, 1956.
5. Levin B. Ya. Distribution o f zeros of entire functions. Amer. Math. Soc , Providence , R. I., 1980.
6. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Ufimsk. matem. zhurn. 2013. Vol. 5. No. 3. Pp. 96–120.
7. Krasichkov-Ternovskii I. F. Matem. sb. 1972. Vol. 88(130). No. 1. Pp. 3–30.
8. Krivosheev A. S. Izv. RAN. Ser. mat. 2004. Vol. 68. No. 2. Pp. 71–136.9.
9. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Algebra i analiz. 2015. Vol. 27. No. 2. Pp. 132–195.

Received 23.11.2016.