УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ

Том IX 1978 № 3

УДК 532.526.5

ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОТ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

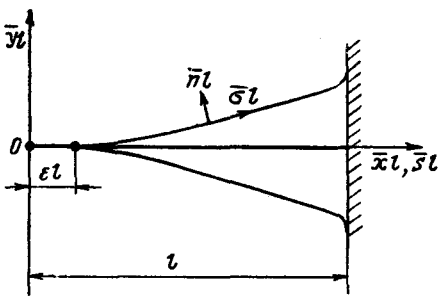
В. В. Сычев

Рассматривается отрыв ламинарного пограничного слоя от поверхности плоской пластины в потоке несжимаемой жидкости, происходящий под действием неблагоприятного градиента давления, обусловленного какими-либо внешними причинами. Путем построения сращиваемых асимптотических разложений, справедливых при больших числах Рейнольдса (Re), показано, что расстояние точки отрыва от передней кромки пластины при $\mathrm{Re} \to \infty$ весьма медленно (как $\mathrm{Re}^{-1/9}$) стремится к нулю. Предельное состояние потока в окрестности точки отрыва при этом соответствует известному решению теории струйных течений со свободными линиями тока, а именно, течению с зоной застоя (каверной), имеющей впереди точку возврата.

Исследования в области асимптотической теории ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Re привели в последние годы к решению ряда задач о взаимодействии и отрыве ламинарного пограничного слоя. Сюда относится теория самоиндуцированного отрыва от гладкой поверхности [1], от угловых точек контура обтекаемого тела [2], асимптотическая теория вязкого обтекания тонкого профиля с отрывом потока вблизи задней кромки [3, 4] и ряд других задач [5]. Во всех случаях предельное состояние поля течения соответствует известным решениям теории потенциальных течений несжимаемой жидкости. Так, например, в случае отрыва потока от гладкой поверхности обтекаемого тела поле течения при $\mathrm{Re} \to \infty$ стремится (по крайней мере в малой окрестности точки отрыва) к известному решению задачи обтекания тела по схеме Гельмгольца с образованием свободных линий тока, в пределе удовлетворяющему условию Брилюэна — Вилля. Вообще процедура построения сращиваемых асимптотических разложений является возможной лишь тогда, когда известно (или правильно предсказано) предельное состояние поля течения, сингулярными возмущениями которого и определяется исследуемое течение при $\mathrm{Re} \gg 1$.

Рассмотрим с этих позиций задачу об отрыве пограничного слоя от поверхности плоской пластины, вызванном какими-либо

внешними причинами, например уступом, расположенным на конечном расстоянии l от ее передней кромки (фиг. 1). Хотя отрыв потока и в этом случае будет происходить от гладкой (плоской) поверхности, непосредственное распространение теории работы [1] на этот случай оказывается невозможным. В самом деле, предельное состояние поля течения при $\mathrm{Re} \to \infty$ в этом случае не может соответствовать упомянутому выше решению задачи обтекания



Фиг. 1

тела по схеме Гельмгольца. Поэтому сделаем следующее предположение: предельное состояние поля течения в окрестности точки отрыва в этом случае соответствует другому известному решению теории потенциальных течений со свободными линиями тока — течению с образованием перед уступом застойной зоны (каверны), начинающейся с заострения в виде точки возврата [6, 7]:

$$\bar{y} \sim \frac{4}{3} c \bar{x}^{3/2} + \ldots \quad (\bar{x} \to 0),$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — безразмерные (отнесенные к l) декартовы координаты (см. фиг. 1), $c = \mathrm{const}$.

Тогда градиент давления непосредственно перед этой точкой будет стремиться к бесконечности как

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \sim c(-\bar{x})^{-1/2} + \ldots \quad (-\bar{x} \to 0).$$

Для того, чтобы такая ситуация была физически реальной, этот градиент давления должен быть самоиндуцированным, т. е. возникать в результате взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком. Покажем, что сделанное предположение позволяет построить замкнутую систему сращиваемых асимптотических разложений, описывающих поле течения в окрестности точки отрыва при $\mathrm{Re} \to \infty$.

1. Исходные соотношения. Течение перед областью отрыва. Введем в качестве характерной длины расстояние l от передней кромки пластины до уступа: в качестве характерной скорости примем скорость U_0 потенциального потока у передней кромки пластины. Заметим, что эта скорость сохраняется постоянной вдоль границы каверны и что она не равна скорости невозмущенного

потока, поскольку размеры (высота) уступа предполагаются конечными (порядка l) или даже сколь угодно большими. Число Re задачи определим как

$$\mathrm{Re} = U_0 l/\nu, \tag{1.1}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости.

Независимые переменные декартовой системы координат с началом, расположенным на передней кромке пластины, обозначим через $\bar{s}l$, $\bar{y}l$. В качестве искомой функции введем функцию тока $\bar{\psi}U_0 l$. Нетрудно установить, что течение в пограничном слое вблизи передней кромки пластины будет безотрывным и описываться решением Блязиуса

$$\bar{\psi} = \mathrm{Re}^{-1/2}\bar{s}^{1/2} f_0\left(\frac{\mathrm{Re}^{1/2}\bar{y}}{\bar{s}^{1/2}}\right), \tag{1.2}$$

поскольку вязкие и инерционные члены этого решения будут порядка $\bar{s}^{-1}$ при $\bar{s}\to 0$, в то время как, согласно нашему предположению, градиент давления есть величина порядка $\bar{s}^{-1/2}$. С другой стороны, действие такого градиента давления на конечном расстоянии от передней кромки, где $\bar{s}=0(1)$, не может быть сбалансировано вязкими и инерционными силами. Отсюда следует, что область взаимодействия и отрыва пограничного слоя должна располагаться на малом расстоянии от передней кромки

$$\bar{s} = \varepsilon, \tag{1.3}$$

где $\varepsilon(\mathrm{Re})\to 0$ при $\mathrm{Re}\to\infty$.

Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные переменные:

$$\left.\begin{aligned} x = \varepsilon^{-1}\bar{x} = \varepsilon^{-1}\bar{s} - 1, \quad y = \varepsilon^{-1/2}\mathrm{Re}^{1/2}\bar{y}, \\ \psi = \varepsilon^{-1/2}\mathrm{Re}^{1/2}\bar{\psi}, \quad p = \bar{p} - \bar{p}_0, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

где $\bar{p}$ — давление в поле течения, а $\bar{p}_0$ — давление на свободной линии тока, отнесенные к удвоенному скоростному напору ρU_0^2. В этих переменных начало координат располагается в точке отрыва, в окрестности которой градиент давления, согласно сделанному предположению, равен

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim c\varepsilon^{1/2}(-x)^{-1/2} + \ldots . \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4) и (1.5) в исходную систему уравнений для функции тока, получим уравнение

$$\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} + \varepsilon^{1/2}c(-x)^{-1/2} = \psi_{yyy}, \tag{1.6}$$

описывающее течение в пограничном слое в предотрывной области ($x<0$) при $-x\to 0$. Граничные условия для этого уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \psi(x,\ 0) = \psi_y(x,\ 0) = 0, \\ \psi_y(x,\ y) \sim 1 - 2c\varepsilon^{1/2}(-x)^{1/2} + \ldots, \quad y\to\infty. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Пользуясь малостью параметра ε, представим решение задачи (1.6), (1.7) в виде

$$\psi \sim \psi_0 + \varepsilon^{1/2}\psi_1 + \ldots . \tag{1.8}$$

Для функции ψ_0 получим уравнение без градиента давления, решение которого, удовлетворяющее заданным граничным условиям, будет определяться функцией Блязиуса (1.2). Так как, согласно (1.4), $\bar{s} = \varepsilon(1+x)$, $\bar{y} = \mathrm{Re}^{-1/2}\varepsilon^{1/2} y$, то

$$\psi_0 = (1+x)^{1/2} f_0\left[\frac{y}{(1+x)^{1/2}}\right] \sim f_0(y) + x\left[\frac{1}{2} f_0(y) - \frac{1}{2} y f_0'(y)\right] + O(x^2). \quad (1.9)$$

Заметим, что

$$\left.\begin{array}{l} f_0(y) \sim \dfrac{a_0}{2} y^2 + O(y^5) \quad \text{при} \quad y \to 0; \\ f_0(y) \sim y + \Delta + \text{экспоненциально убывающие члены при } y \to \infty, \\ a_0 = 0{,}33206, \quad \Delta = \text{const}. \end{array}\right\} \quad (1.10)$$

Для следующего члена разложения (1.8) — функции ψ_1 — получим линейное уравнение вида

$$f_0'(y)\psi_{1xy} - \frac{1}{2} y f_0''(y)\psi_{1y} - \frac{1}{2}[f_0(y) - y f_0'(y)]\psi_{1yy} - f_0'(y)\psi_{1x} + c(-x)^{1/2} = \psi_{1yyy} \quad (1.11)$$

с граничными условиями

$$\psi_1(x, 0) = \psi_{1y}(x, 0) = 0, \quad \psi_{1y} \to 2c(-x)^{1/2} \quad \text{при} \quad y \to \infty. \quad (1.12)$$

Так как при $-x \to 0$ вязкий член в правой части (1.11) по порядку величины остается конечным, а градиент давления неограниченно возрастает, то течение в основной части пограничного слоя при $-x \to 0$ будет локально невязким. Для удовлетворения условию прилипания необходимо поэтому, как обычно, ввести вязкий подслой. Учитывая поведение функции $f_0(y)$ при $y \to 0$ (1.10), а также требование баланса вязких и инерционных членов и градиента давления в подслое, нетрудно установить, что для главного члена разложения функции $\psi_1(x, y)$ в этой области имеем

$$\psi_1 \sim (-x)^{1/2} f_1(\eta) + \ldots, \quad \eta = y(-x)^{-1/3}. \quad (1.13)$$

Функция $f_1(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$f_1''' - \frac{1}{3} a_0 \eta^2 f_1'' + \frac{1}{2} a_0 \eta f_1' - \frac{1}{2} a_0 f_1 = c \quad (1.14)$$

с граничными условиями на стенке

$$f_1(0) = f_1'(0) = 0. \quad (1.15)$$

К этим граничным условиям необходимо еще добавить требование, чтобы функция $f_1(\eta)$ не возрастала экспоненциально при $\eta \to \infty$.

Перечисленные условия единственным образом определяют искомую функцию, которая при $\eta \to \infty$ имеет асимптотическое представление вида

$$f_1(\eta) \sim a_1 \eta^{3/2} + b_1 \eta + \ldots, \quad \eta \to \infty. \quad (1.16)$$

Численное интегрирование (1.14) дает для постоянных в (1.16) следующие значения: $a_1 = -5{,}48\, c\, a_0^{-1/2}$, $b_1 = 4{,}92\, c a_0^{-2/3}$. Асимптотическое представление функции $f_1(\eta)$ при $\eta \to \infty$ позволяет выписать условия сращивания решений для ψ_1 в вязком подслое и в основной части пограничного слоя. Пользуясь этим представлением, а также (1.13), получим, что функция $\psi_1(x, y)$ в основной части пограничного слоя при $-x \to 0$, $y \to 0$ должна иметь вид

$$\psi_1 \sim a_1 y^{3/2} + b_1 (-x)^{1/6} y + \ldots. \quad (1.17)$$

На основании этого можно написать следующее разложение для $\psi_1(x, y)$ при $y=0$ (1):

$$\psi_1 \sim F_{10}(y) + (-x)^{1/6} F_{11}(y) + \ldots, \quad -x \to 0. \tag{1.18}$$

Подставляя это разложение в (1.11), получим следующее уравнение

$$f_0' F_{11}' - f_0'' F_{11} = 0, \tag{1.19}$$

решение которого с учетом граничных условий (1.12) имеет вид:

$$F_{11}(y) = A_{11} f_0''(y). \tag{1.20}$$

На основании (1.17) и (1.10) определяем постоянную интегрирования $A_{11} = b_1/a_0$. Заметим также, что

$$F_{10}(y) \sim a_{10} y^{3/2} + \ldots, \quad y \to 0. \tag{1.21}$$

Этим завершается построение асимптотического решения для течения в пограничном слое перед областью взаимодействия и отрыва при $-x \to 0$.

2. Область взаимодействия. Выпишем теперь, пользуясь (1.8), (1.13), разложение для функции тока в подслое:

$$\psi \sim \frac{1}{2} a_0 (-x)^{2/3} \eta^2 + \varepsilon^{1/2} [(-x)^{1/2} f_1(\eta) + \ldots]. \tag{2.1}$$

Это разложение перестает быть справедливым при $\varepsilon^{1/2}(-x)^{1/2-2/3} = = 0(1)$, т. е. при $(-x) = O(\varepsilon^3)$. Поэтому необходимо отдельно рассмотреть окрестность точки отрыва с продольным масштабом порядка ε^3. Для определения порядков величин переменных в этой области воспользуемся полученными в предыдущем разделе асимптотическими представлениями. Начнем с оценки величины поперечной составляющей вектора скорости в основной части пограничного слоя при $y \to \infty$. Ее безразмерное значение равно

$$\bar{v} = -\mathrm{Re}^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} \psi_x. \tag{2.2}$$

Так как при $-x \to 0$, $y \to \infty$ на основании (1.9), (1.10)

$$\psi_{0x} = \frac{1}{2}(f_0 - y f_0') \sim \frac{1}{2} \Delta, \tag{2.3}$$

а на основании (1.18), (1.20)

$$\psi_{1x} \sim -\frac{1}{6}(-x)^{-5/6} F_{11}(y) + \ldots \sim -\frac{1}{6}(-x)^{-5/6} A_{11} + \ldots, \tag{2.4}$$

то при $(-x) = O(\varepsilon^3)$,

$$\psi_x = O(\varepsilon^{-2}) \text{ и } \bar{v} = O(\mathrm{Re}^{-1/2} \varepsilon^{-5/2}). \tag{2.5}$$

Продольная составляющая вектора скорости в основной части пограничного слоя есть величина порядка единицы. Поэтому полученная оценка (2.5) определяет величину угла наклона вектора скорости ϑ. С другой стороны, на основании сделанного предположения о характере потенциального течения $\vartheta \varepsilon^{-1/2} x^{-1/2} = = 0(1)$, так что в области взаимодействия $\vartheta = O(\varepsilon^2)$. Приравнивая полученные оценки для ϑ при $|x| = O(\varepsilon^3)$, находим, что

$$\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/9}. \tag{2.6}$$

Таким образом, продольный размер области взаимодействия $\Delta \bar{x} = \varepsilon \Delta x = O(\varepsilon^4)$; поперечный масштаб вязкого подслоя в этой области $\bar{y} = \varepsilon^5 y = O(\varepsilon^6)$; функция тока в подслое $\bar{\psi} = \varepsilon^5 \psi = O(\varepsilon^7)$; переменная часть коэффициента давления $p = O(\varepsilon^2)$.

Заметим теперь, что все основные соотношения рассматриваемой задачи формально сводятся к соотношениям задачи об отрыве

от гладкой поверхности тела, рассмотренной в работе [1]. В самом деле, переход от переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\psi}$ к переменным x, y, ψ, согласно соотношениям (1.4), по существу, равносилен введению в качестве характерной длины вместо l расстояния εl от передней кромки пластины до точки отрыва потока. Если теперь, пользуясь этим масштабом, определить число Рейнольдса задачи как $\mathrm{Re}_\varepsilon = U_0 \varepsilon l/\nu$, то на основании (2.6) получим, что основной параметр, входящий в уравнение (1.6) и во все последующие соотношения предыдущего раздела, равен $\sqrt{\varepsilon} = \mathrm{Re}_\varepsilon^{-1/16}$, т. е. совпадает с малым параметром работы [1]. Это обстоятельство позволяет в дальнейшем опустить некоторые подробности выкладок, приведенные в [1].

Вводя на основании полученных оценок переменные порядка единицы для течения в подслое области взаимодействия

$$\bar{X} = \varepsilon^{-3} x, \quad Y = \varepsilon^{-1} y, \quad \Psi = \varepsilon^{-2} \psi, \quad P = \varepsilon^{-2} p, \tag{2.7}$$

получим следующие уравнения и граничные условия для главных членов асимптотических разложений в этой области:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_Y \Psi_{XY} - \Psi_X \Psi_{YY} + P_X = \Psi_{YYY}; \quad P_Y = 0; \\ &\Psi(X, 0) = \Psi_Y(X, 0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

В основной части пограничного слоя области взаимодействия вследствие (1.18) будем иметь

$$\psi \sim f_0(y) + \varepsilon^{1/2} F_{10}(y) + O(\varepsilon). \tag{2.9}$$

Сращивание этого разложения при $y \to 0$ с решением для подслоя при $Y \to \infty$ дает внешнее граничное условие для уравнения (2.8):

$$\Psi \sim \frac{1}{2} a_0 Y^2 + a_1 Y^{3/2} + \ldots . \tag{2.10}$$

Сращивание решения в подслое области взаимодействия с асимптотическим разложением (2.1) дает необходимое начальное условие для уравнения (2.8):

$$\Psi(X, Y) \sim \frac{1}{2} a_0 Y^2 + (-X)^{1/2} f_1\left[\frac{Y}{(-X)^{1/3}}\right] + \ldots \text{ при } X \to -\infty. \tag{2.11}$$

Так как давление не меняется поперек пограничного слоя, и наклон линий тока, обусловленный вытесняющим воздействием вязкого подслоя, передается без изменения поперек основной части пограничного слоя, то из рассмотрения потенциального течения в области $(\bar{x}, \bar{y}) = O(\varepsilon^4)$ можно получить решение в виде известного интеграла теории тонкого профиля

$$P_X = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G'(t)}{t - X},$$

где

$$G(X) = \lim_{Y \to \infty} \left\{ -\frac{\Psi_X}{\Psi_Y} \right\}. \tag{2.12}$$

Найденное значение P_X следует подставить в уравнение (2.8) при $\varepsilon^{-4} \bar{y} \to 0$. Для полного замыкания задачи о течении в подслое области взаимодействия необходимо еще определить асимптотическое условие вниз по потоку при $X \to \infty$ в зоне возвратного течения в области отрыва. Это условие может быть получено из рассмотрения течения за областью взаимодействия.

3. Течение за областью взаимодействия. Профиль скорости в основной части пограничного слоя, как было показано выше, остается неизменным в области взаимодействия и в своем главном члене сохранится также вниз по потоку от этой области. Эта часть поля течения будет отделяться от зоны отрыва слоем смешения. Введем криволинейную ортогональную систему координат $\bar{\sigma}$, $\bar{n}$ (см. фиг. 1), в которой линия $\bar{n}=0$ совпадает с нулевой линией тока.

Независимыми переменными порядка единицы в слое смешения будут

$$\sigma=\varepsilon^{-1}\bar{\sigma}, \quad n=\varepsilon^{-5}\bar{n}, \tag{3.1}$$

а функция тока в своем главном члене будет равна

$$\bar{\psi}\sim\varepsilon^5\psi+\ldots. \tag{3.2}$$

Так как градиент давления вдоль области отрыва в первом приближении отсутствует, то для функции ψ получаем уравнение

$$\psi_n\psi_{\sigma n}-\psi_\sigma\psi_{nn}=\psi_{nnn}. \tag{3.3}$$

При $n\to\infty$ из условий сращивания с основной частью оторвавшегося пограничного слоя получим

$$\psi\sim\frac{1}{2}a_0n^2+\ldots. \tag{3.4}$$

Кроме того, имеют место обычные для слоя смешения условия

$$\left.\begin{aligned}&\psi(\sigma,\ 0)=0;\\ &\psi_n(\sigma,\ n)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to-\infty.\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Задача (3.3)—(3.5) имеет решение вида

$$\psi\sim\sigma^{2/3}g_0(\nu)+\ldots, \quad \nu=n\sigma^{-1/3}, \tag{3.6}$$

причем функция $g_0(\nu)$ удовлетворяет уравнению

$$g_0'''+\frac{2}{3}g_0g_0''-\frac{1}{3}g_0'^2=0 \tag{3.7}$$

и граничным условиям

$$g_0(\nu)\sim\frac{1}{2}a_0\nu^2+\ldots, \quad (\nu\to\infty); \quad g_0(0)=0; \quad g_0'(-\infty)=0. \tag{3.8}$$

Решение этой задачи известно [8]; оно дает значение $a_0^{-1/3}g_0(-\infty)=K_0=-1{,}2521$.

В области отрыва ($\bar{\psi}<0$) имеет место медленное течение с характерной скоростью, определяемой эжектирующим воздействием слоя смешения. Кроме того, известна форма нулевой линии тока (границы зоны) при $\bar{x}\to 0$:

$$\bar{y}\sim\frac{4}{3}c\bar{x}^{3/2}+\ldots. \tag{3.9}$$

Таким образом, здесь при $\bar{x}=O(\varepsilon)$ имеем $\bar{y}=O(\varepsilon^{3/2})$ и $\bar{\psi}=O(\varepsilon^5)$. В результате для скорости течения и давления получаем оценки $\bar{\psi}_{\bar{y}}=0(\varepsilon^{7/2})$, $p=0(\varepsilon^7)$. Решение задачи для течения в зоне отрыва имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\psi}\sim\varepsilon^5x^{2/3}h(\xi)+\ldots, \quad \xi=\bar{y}\bar{x}^{-3/2}\\ &p\sim\varepsilon^7\lambda x^{-5/3}+\ldots.\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Функция $h(\xi)$ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} hh'' + \frac{5}{4}h'^2 &= \frac{5}{2}\lambda; \\ h(0) = 0, \quad h\left(\frac{4}{3}c\right) &= a_0^{1/3} K_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Если принять в качестве решения этого уравнения

$$h = -\sqrt{2\lambda}\,\xi, \tag{3.12}$$

то из второго граничного условия (3.11) получим, что $\lambda = \frac{9}{32}\frac{a_0^{2/3}K_0^2}{c^2}$.

Остается рассмотреть последнюю область поля течения при $\bar{x} > 0$ — пограничный слой на стенке в зоне отрыва, поскольку решение задачи (3.11) не удовлетворяет условию прилипания. Обычная процедура вывода уравнений пограничного слоя показывает, что функция тока в этой области может быть представлена в виде

$$\bar{\psi} \sim \varepsilon^{27/4} x^{1/12} \varphi_0(\zeta), \quad \zeta = \varepsilon^{-11/4} y x^{-11/12}. \tag{3.13}$$

Уравнение и граничные условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi_0(\zeta)$, имеют при этом вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0''' + \frac{1}{12}\varphi_0\varphi_0'' + \frac{5}{6}\varphi_0'^2 &= \frac{5}{3}\lambda; \\ \varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0; \quad \varphi_0'(\infty) &= -\sqrt{2\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

4. Закон подобия. Условия сращивания решения в области взаимодействия и отрыва с течением за областью взаимодействия, которые получаются на основе асимптотических выражений (3.6), (3.10) и (3.13), вместе с ранее полученными условиями (2.8), (2.10), (2.11) и (2.12) полностью замыкают задачу. Заметим теперь, что замена переменных вида

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= a_0^{-1/2}\bar{\Psi}; \\ X = a_0^{-5/4}\bar{X}; \quad Y &= a_0^{-3/4}\bar{Y}; \\ P &= a_0^{1/2}\bar{P} \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

позволяет привести все соотношения к форме, включающей лишь один параметр

$$\alpha = c/a_0^{9/8}, \tag{4.2}$$

который будет, таким образом, параметром подобия задачи, характеризующим относительную роль градиента давления и трения в основной части пограничного слоя.

Для удобства ниже выписана полная система соотношений в переменных подобия, описывающая течение в области взаимодействия

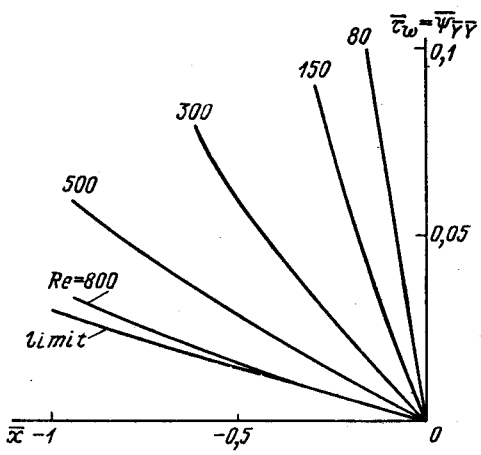
$$\left.\begin{aligned} &\bar{\Psi}_{\bar{Y}}\bar{\Psi}_{\bar{X}\bar{Y}} - \bar{\Psi}_{\bar{X}}\bar{\Psi}_{\bar{Y}\bar{Y}} + \bar{P}_{\bar{X}} = \bar{\Psi}_{\bar{Y}\bar{Y}\bar{Y}}; \quad \bar{P}_{\bar{Y}} = 0; \\ &\bar{P}_{\bar{X}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{G}'(t)}{t-\bar{X}}\,dt; \quad \bar{G}(\bar{X}) = \lim_{\bar{Y}\to\infty}\left\{-\frac{\bar{\Psi}_{\bar{X}}}{\bar{\Psi}_{\bar{Y}}}\right\}; \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\Psi}(\overline{X}, 0) = \overline{\Psi}_{\overline{Y}}(\overline{X}, 0) = 0;\\
&\overline{\Psi} \sim \frac{1}{2}\overline{Y}^2 + \ldots \quad \text{при } Y \to \infty;\\
&\overline{\Psi} \sim \frac{1}{2}\overline{Y}^2 + \alpha(-\overline{X})^{1/2}\overline{f}_1\left[\frac{\overline{Y}}{(-\overline{X})^{1/3}}\right] + \ldots \quad \text{при } \overline{X} \to -\infty;\\
&\overline{\Psi} \sim \overline{X}^{2/3}\overline{g}_0\left[\frac{\overline{Y} - \frac{4}{3}\alpha\overline{X}^{3/2}}{\overline{X}^{1/3}}\right] + \ldots\\
&\overline{\Psi} \sim -\frac{3}{4}\frac{K_0}{\alpha}\overline{Y}\,\overline{X}^{-5/6} + \ldots\\
&\overline{\Psi} \sim \overline{X}^{1/12}\overline{\varphi}_0(\overline{Y}\,\overline{X}^{-11/12}) + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad \text{при } \overline{X} \to \infty. \qquad (4.3)$$

В этих соотношениях

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{f}_1(\overline{\eta}) = a_0^{-1/8} f_1(\overline{\eta} a_0^{-1/3});\\
&\overline{g}_0(\overline{\nu}) = a_0^{-1/3} g_0(\overline{\nu} a_0^{9/8});\\
&\overline{\varphi}_0(\overline{\zeta}) = a_0^{7/16}\varphi_0(\overline{\zeta} a_0^{19/48})
\end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

и функции $\overline{f}_1$, $\overline{g}_0$, $\overline{h}_0$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям, не содержащим никаких параметров, кроме α.



Фиг. 2

В заключение заметим, что рассмотренная задача об отрыве ламинарного пограничного слоя от поверхности плоской пластины относится, разумеется, не только к частному случаю, когда причиной отрыва является препятствие в виде уступа. Любая другая причина, вызывающая появление неблагоприятного градиента давления (достаточного для появления отрыва), будет приводить к тем же результатам.

Дополнение. Когда эта статья была уже написана, автору стала известной работа [9], в которой проведено численное исследование существования и единственности решения задачи об отрыве от гладкой поверхности [1], полностью эквивалентной (как уже отмечалось) задаче (4.3). В результате проведенных в этой работе расчетов (подтвердивших предложенную трехслойную асимптотическую структуру течения) было найдено единственное зна-

чение параметра $\alpha = 0{,}44$, а также получены асимптотические зависимости для распределения давления и трения в окрестности точки отрыва. Используя эти зависимости, можно сопоставить результаты описанной выше асимптотической теории отрыва от поверхности пластины с численными результатами работы [10], в которой эта задача решалась на основе численного интегрирования полных уравнений Навье — Стокса при числах Re до 800. Соответствующие зависимости для распределения трения перед точкой отрыва приводятся на фиг. 2. Как видно, соответствие асимптотической теории „limit" численным расчетам улучшается с ростом числа Re и оказывается весьма удовлетворительным при $\mathrm{Re} = 800$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О ламинарном отрыве. „Изв. АН СССР, МЖГ", 1972, № 3.

2. Рубан А. И. О ламинарном отрыве от точки излома твердой поверхности. „Ученые записки ЦАГИ", т. 5, № 2, 1974.

3. Stewartson K. On laminar boundary-layer near corners. „Qvart J. Mech. Appl. Math.", vol. 23, part 2, 1970.

4. Рубан А. И. К теории ламинарного отрыва жидкости от точки излома твердой поверхности. „Ученые записки ЦАГИ", т. 7, № 4, 1976.

5. Stewartson K. Multistructured boundary-layer on flat plates and related bodies. „Adv. in Appl. Mech.", vol. 14, 1974.

6. Чаплыгин С. А. К вопросу о струях в несжимаемой жидкости. Собр. соч. т. X, 1899.

7. Lighthill M. J. A note cusped cavities. „ARC Rep. and Mem". N 2328, 1949.

8. Нейланд В. Я. Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. „Изв. АН СССР, МЖГ", 1971, № 3.

9. Smith F. T. The laminar separation of an incompressible fluid streaming past a smouth surface. „Proceedings of the Royal Society", sec. A, N 356, 1977.

10. Leal L. G. Steady separated flow in a linearly decelerated free stream. „J. Fluid Mech.", vol. 59, 1973.

Рукопись поступила 3/I 1978 г.