ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Р.В. Бирих[1], Р.Н. Рудаков[2]

[1] Пермский государственный педагогический университет,
614990, Пермь, Сибирская, 24

[2] Пермский государственный технический университет,
614600, Пермь, Комсомольский пр., 29 а

В [1, 2] обнаружен интересный режим колебательной конвекции около вертикальной поверхности пузырька в стратифицированном растворе. В настоящей работе делается попытка численного моделирования наблюдавшегося в эксперименте явления. Для описания конвективного движения жидкости и распределения ПАВ выбрана вытянутая в горизонтальном направлении прямоугольная область, одна из вертикальных границ которой моделирует поверхность пузырька. В начальный момент времени предполагается вертикальный или горизонтальный градиент концентрации ПАВ. Система уравнений концентрационной конвекции решается методом конечных разностей. Коэффициент поверхностного натяжения предполагается линейно зависящим от концентрации ПАВ. Для больших значений числа Марангони и больших диффузионных времен вычисляются нестационарные распределения концентрации и поля функции тока. В случае вертикального градиента после переходного режима устанавливается двухвихревое течение с отдельной локализацией гравитационной и капиллярной конвекций. При горизонтальном начальном градиенте концентрации на фоне относительно медленной гравитационной конвекции, переносящей ПАВ к свободной поверхности, периодически наблюдается интенсивное концентрационно-капиллярное течение. Продолжительность интенсивной конвекции составляет около 1/10 периода колебаний.

© Р.В. Бирих, Р.Н. Рудаков, 2005

ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты по изучению концентрационно-капиллярной конвекции показывают ее заметное отличие от термокапиллярной конвекции. Это отличие в первую очередь связано с большими значениями диффузионного числа Прандтля (числа Шмидта). Механизм выхода поверхностно-активного вещества (ПАВ) на границу раздела фаз отличается от механизма формирования температуры границы. Кроме того, граница раздела, рассматриваемая как отдельная фаза, обладает инерционными свойствами и вдоль поверхности раздела возможен конвективный перенос ПАВ и его поверхностная диффузия.

В экспериментах с вертикальным градиентом ПАВ в горизонтальном слое [1] обнаружены периодические изменения поля концентрации вблизи границы цилиндрического пузырька воздуха. Более детально изменение полей концентрации ПАВ исследовано этими же авторами с пузырьком в ячейке Хеле-Шоу [3]. В этих экспериментах можно различить два вида колебаний. Один из них связан с интенсивной Марангони конвекцией, возникающей из-за переноса ПАВ к границе медленным глобальным течением жидкости в объеме полости. Она перемешивает жидкость у пузырька и так же быстро затухает, как возникла. Другое периодическое движение, наблюдаемое у самой границы пузырька, вызывается всплытием жидкости с высокой концентрацией ПАВ.

В предлагаемом численном исследовании для простоты рассматривается прямоугольная полость, одна из вертикальных границ которой моделирует поверхность пузырька. Делается попытка получить колебательный режим конвекции в рамках модели термокапиллярной конвекции с большими значениями числа Шмидта. Так как в экспериментах начальное поле концентрации достаточно сложное, рассмотрены два варианта начального распределения ПАВ в объеме – с вертикальным и горизонтальным градиентами концентрации.

1. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим конвективное течение в прямоугольной области, вызванное неоднородным распределением в объеме капельной жидкости растворимой компоненты легкой примеси – ПАВ. Плотность жидкости зависит от концентрации ПАВ, и в поле тяжести возможна гравитационная конвекция. Одна из вертикальных стенок полос-

ти ($x = 0$) моделирует границу жидкости с воздушным пузырьком, на которой действует поверхностное натяжение, зависящее от концентрации ПАВ на поверхности $\sigma = \sigma_0 - \sigma_1 c$. Остальные границы полости предполагаются твердыми.

Полная система уравнений свободной конвекции в безразмерных переменных – функция тока ψ , вихрь φ и концентрация c – имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Delta\varphi - G\frac{\partial c}{\partial x}$$

$$\Delta\psi = -\varphi$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} = Sc^{-1}\Delta c \qquad (1.1)$$

$$G = \frac{g\beta_C C_0 h^3}{\nu^2}, \quad Sc = \frac{\nu}{D}$$

Здесь G – число Грасгофа, Sc – число Шмидта, h – толщина слоя, C_0 – максимальное значение концентрации ПАВ в начальном состоянии, g – ускорение свободного падения, β_C , ν и D – коэффициенты объемного расширения, кинематической вязкости и диффузии жидкости. В качестве единиц измерения выбраны: расстояния – h , времени – h^2/ν , функции тока – ν , концентрации – C_0. На границах области ставились следующие граничные условия:

$$x = 0: \quad \psi = 0, \quad \varphi = MaSc^{-1}\frac{\partial c}{\partial y}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

$$x = L: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad c = c(y) \qquad (1.2)$$

$$y = 0,1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

Здесь $Ma = \sigma_1 C_0 h / \eta D$ – число Марангони, η – динамическая вязкость жидкости, L – длина области, измеренная в единицах толщины. Условие для вихря на границе пузырька записано из условия баланса касательных напряжений.

В начальном состоянии жидкость предполагалась покоящейся ($\psi = 0$, $\varphi = 0$). Рассматривались два разных начальных распределения концентрации ПАВ:

$$c(0, x, y) = 0.5\left(1 + \frac{\mathrm{th}(5(y - 0.5))}{\mathrm{th}\, 2.5}\right) \qquad (1.3a)$$

$$c(0, x, y) = 0.5\left(1 + \frac{\mathrm{th}(5(x - 0.5L))}{\mathrm{th}(2.5L)}\right) \qquad (1.3б)$$

В первом варианте задается вертикальный градиент концентрации ПАВ, описывающий переход от чистой жидкости к концентрированному раствору ПАВ в тонком слое около плоскости $y = 0.5$. Во втором случае такой переход происходит в горизонтальном направлении (у поверхности пузырька – чистая жидкость). Ширина переходного слоя определяется множителем в аргументе гиперболического тангенса.

Нестационарная краевая задача (1.1) – (1.3) решалась методом конечных разностей на квадратной сетке по неявной схеме Кранка – Николсона. Решение уравнение Пуассона для функции тока находилось методом последовательной верхней релаксации.

2. КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛУЧАЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ПАВ

Рассмотрим конвективное течение, которое вызывается распределением ПАВ по закону (1.3 *а*). В этом случае на поверхности пузырька ($x = 0$) в начальный момент имеется градиент концентрации ПАВ и возникает интенсивная Марангони конвекция. На рис. 1 приведены изолинии функции и концентрации ПАВ для $Ma = 10000$, $G = 10$, $Sc = 1000$, $L = 1$ в момент времени $t = 0.5$.

Конвективный вихрь переносит легкую компоненту раствора вдоль пузырька в нижнюю часть полости. При этом вдоль поверхности пузырька уменьшается градиент концентрации ПАВ, а внизу полости образуется область с горизонтальным градиентом концентрации. Далее с течением времени формируется встречный концен-

трационно-гравитационный вихрь, который при безразмерном времени $t = 15$ останавливает Марангони конвекцию. Изменение структуры движения иллюстрируется рис. 2.

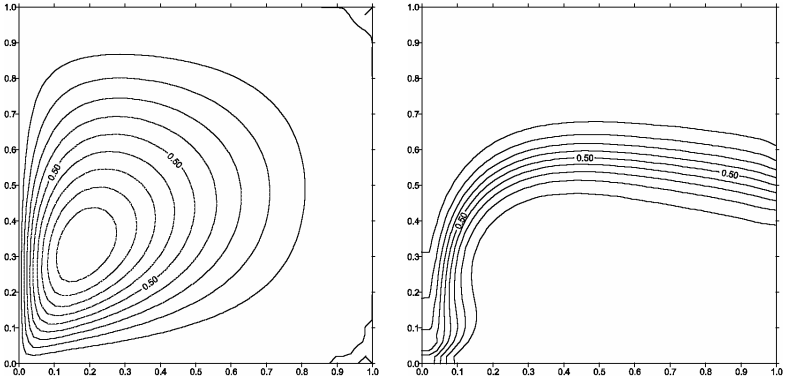
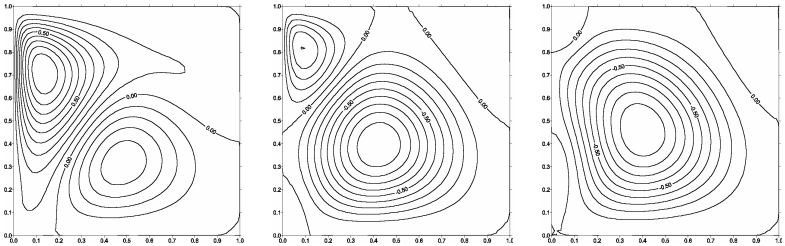


Рис. 1. Изолинии функции тока (*а*) и концентрации (*б*) при $t = 0.5$



$t = 10$ $t = 12$ $t = 15$

Рис. 2. Изолинии функции тока для разных значений времени в начальном периоде конвекции

В дальнейшем гравитационный вихрь отодвигается от поверхности пузырька и вновь появляется концентрационно-капиллярное течение. Типичная структура движения и распределение концентрации ПАВ показаны на рис. 3. В полости устанавливается квазистационарный режим движения, при котором Марангони конвекция непрерывно подносит к поверхности новые порции ПАВ, а гравитационный вихрь постоянно удаляет легкую компоненту раствора от поверхности пузырька. Интенсивность движения с течением времени падает.

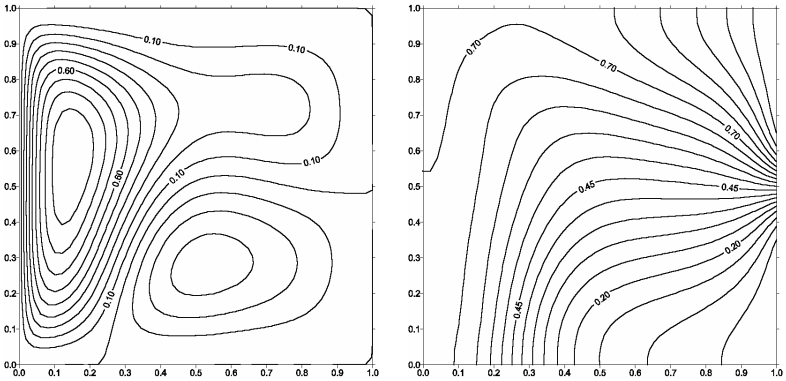


Рис. 3. Изолинии функции тока и концентрации ПАВ при t = 40

Численные эксперименты с полостями, вытянутыми по горизонтали, показали, что вблизи пузырька структура конвективного движения не чувствительна к увеличению L.

В первом численном эксперименте не удалось наблюдать колебательный режим конвекции. Это можно объяснить тем, что гравитационный вихрь не восстанавливает начальное распределение концентрации вблизи поверхности пузырька.

3. КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛУЧАЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ПАВ

Во втором численном эксперименте в качестве начального состояния взята система с горизонтальным градиентом концентрации. В начальный момент на поверхности пузырька отсутствует градиент концентрации ПАВ (у поверхности пузырька чистая жидкость). В поле тяжести под влиянием горизонтального градиента легкой компоненты жидкости возникает слабое конвективное течение, которое меняет распределение концентрации ПАВ в слое. Структура этого движения и изолинии c для $t = 5$ показаны на верхних кадрах рис. 4 ($Ma = 100000$, $G = 10$, $Sc = 1000$, $L = 2$).

При времени, близком к 10 безразмерным единицам, достаточно высокая концентрация ПАВ достигает границы пузырька, вдоль нее возникает градиент поверхностного натяжения, и вспыхивает конвекция Марангони. Форму движения жидкости при $t = 10$ иллюстрирует вторая серия кадров рис. 4.

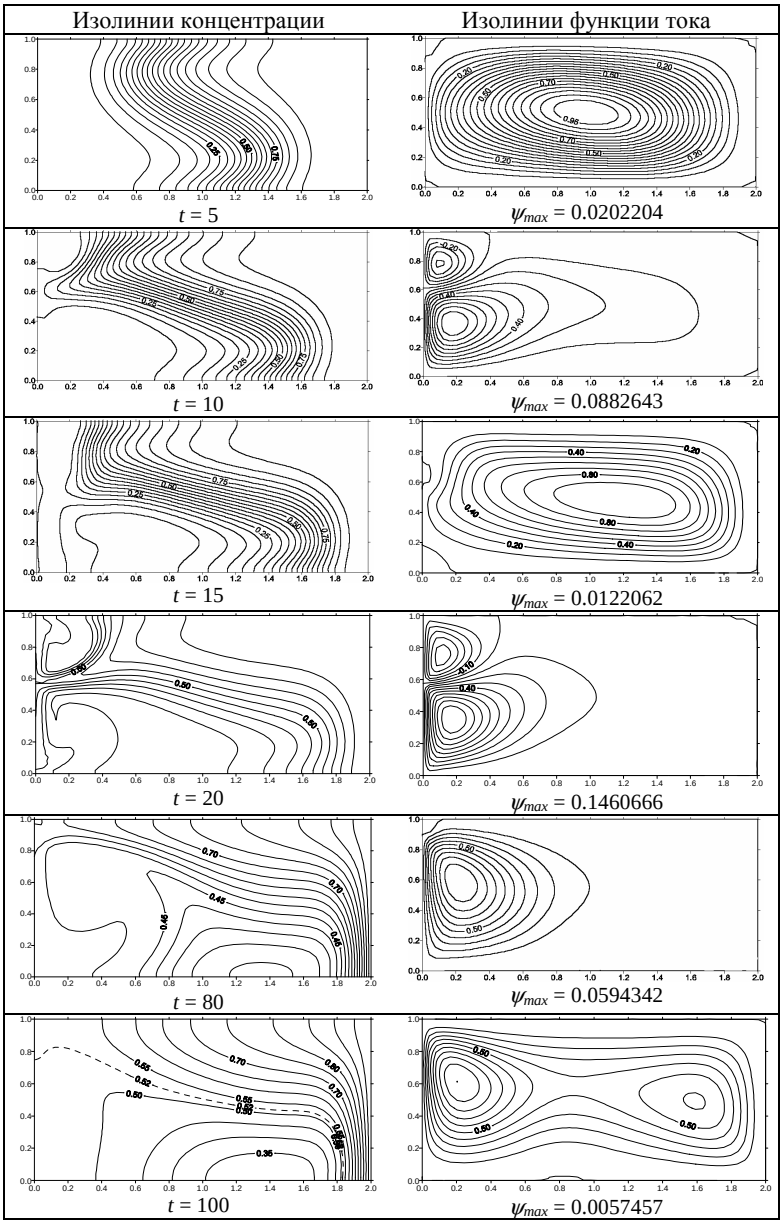


Рис. 4. Структура движения для разных моментов времени при $Ma = 100000$, $G = 10$, $Sc = 1000$, $L = 2$

Интенсивная Марангони конвекция отсекает область у поверхности пузырька от адвективного вихря и выравнивает концентрацию ПАВ в ней. После этого конвекция Марангони затухает, и адвективное движение вновь охватывает всю область (рис. 4, $t = 15$). Новый всплеск интенсивной конвекции вблизи границы пузырька наблюдается при $t = 20$.

Благодаря такому взаимодействию адвективного течения и Марангони конвекции возникает автоколебательный режим. Для указанных выше параметров задачи наблюдалось 5 острых пиков интенсивности конвективного течения.

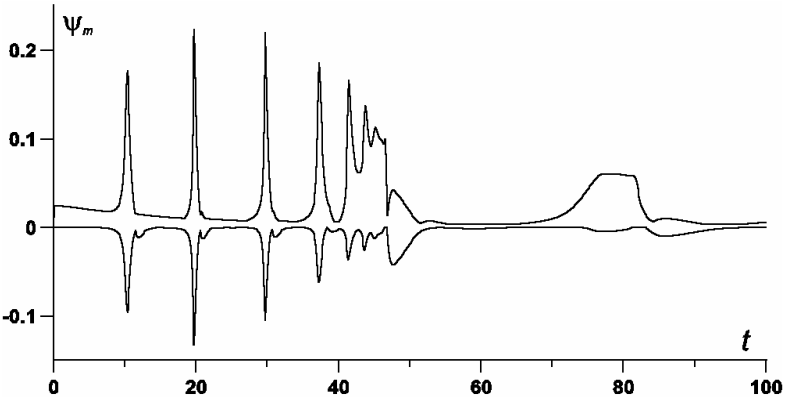


Рис. 5. Максимальное и минимальное значения ψ как функции времени

На рис. 5 показана зависимость максимального и минимального значений функции тока от времени. При $t > 40$ жидкость достаточно сильно перемешана и колебания имеют более сложную структуру. Картины движения при $t = 80$ и $t = 100$ показаны на нижних кадрах рис. 4.

Наблюдавшиеся в численном эксперименте вспышки Марангони конвекции при $t = 10$, 20, 30, 37 и 42 хорошо согласуются с результатами эксперимента [3].

Заключение. В приведенном численном эксперименте моделируется нестационарное конвективное течение жидкости с раствором ПАВ у вертикальной границы пузырька воздуха в горизонтальном слое. Граница пузырька предполагается плоской. Концентрация ПАВ на поверхности пузырька определяется только диффузионным потоком (поверхностной фазы нет).

В этом приближении при начальном вертикальном градиенте концентрации наблюдался один переход от чисто Марангони конвекции к гравитационной конвекции, после чего устанавливался квазистационарный режим конвекции с постепенным уменьшением ее интенсивности.

В случае начального горизонтального градиента удалось наблюдать серию автоколебаний, в которой медленное адвективное течение сменялось быстрой Марангони конвекцией. Эти колебания похожи на колебания, наблюдавшиеся в экспериментах [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00–01–00614).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зуев А.Л., Костарев К.Г.* Концентрационно-капиллярная конвекция вблизи поверхности пузырька в горизонтальном слое неоднородного раствора жидкости // Конвективные течения... / Перм. гос. пед. ун-т. Пермь, 2003. С. 123–139.
2. *Kostarev K.G., Zuev A.L., Viviani A.* Oscillatory Marangoni convection around the air bubble in a vertical surfactant stratification // J. Comptes Rendus Mecanique. 2004. V. 332. № 1. C. 1–7.
3. *Костарев К.Г. Писаревская Н.Н.* Экспериментальное исследование массообмена между каплей и раствором ПАВ // Конвективные течения... / Перм. гос. пед. ун-т. Пермь, 2005. Вып. 2. С. 216–232.

NUMERICAL SIMULATION OF CONVECTIVE SELF-SUSTAINED OSCILLATIONS IN A RECTANGULAR REGION WITH VERTICAL FREE BOUNDARY

R.V. BIRIKH, R.N. RUDAKOV

The paper is concerned with numerical simulation of oscillatory convection near the vertical surface of a bubble in a stratified solution. To describe the fluid motion and surfactant distribution

we choose a rectangular region stretched in a horizontal direction with its vertical boundary modeling the bubble surface. At the initial time the solution is assumed to have vertical and horizontal gradients of the surfactant concentration. The system of equations for concentration convection is solved by the finite-difference method. The surface tension is assumed to depend linearly on the surfactant concentration. Numerical experiments for large Marangoni numbers and long diffusion time have been performed to calculate a non-stationary distribution of the surfactant concentration and the field of the flow function. In the case of vertical concentration gradient the transient mode changes to a two-vortex flow with a separate localization of the gravitational and capillary convection. In a horizontal initial gradient a relatively slow gravitational convection carrying the surfactant to the bubble surface serves as a background for periodically initiated intensive solutocapillary flows. The lifetime of intensive convection is about 1/10 of the oscillation period.