

УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСЕТОЧНОГО МЕТОДА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ – ДИФФУЗИИ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

С.В. Тиховская

Аннотация

Исследуется двухсеточный метод для линейного эллиптического уравнения с малым параметром ε при старшей производной. Рассматривается ε -равномерно сходящаяся разностная схема на сетке Шишкина. Для разрешения разностной схемы используется двухсеточный метод с ε -равномерной интерполяционной формулой. Для повышения точности схемы применяется экстраполяция Ричардсона. Приводятся результаты численных экспериментов. При реализации двухсеточного алгоритма предлагаются различные итерационные методы.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение реакции – диффузии, сингулярное возмущение, сетка Шишкина, двухсеточный метод, экстраполяция Ричардсона, равномерная сходимость.

Введение

Рассматривается сингулярно возмущенная задача типа реакции – диффузии для линейного эллиптического уравнения в единичном квадрате. Такого рода задачи возникают в различных приложениях, и интерес к ним высок (см., например, [1–5] и приведенную там библиографию). Известно [6], что при выполнении условий согласования [2, 7] решение такого типа задач имеет регулярные экспоненциальные пограничные слои ширины порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ вблизи границы. Известно также [7, 8], что решение может иметь сингулярности в угловых точках области. При исследовании сингулярно возмущенных задач основным аспектом остается вопрос ε -равномерной сходимости разностных схем. Один из способов достижения равномерной сходимости является использование сгущающихся сеток [1, 4, 6, 9]. В настоящей работе рассматривается классическая пятиточечная разностная схема на сетке Шишкина, имеющая в случае выполнения условий согласования ε -равномерную точность порядка $O(\ln^2 N/N^2)$. Имеются также оценки и в случае более слабых ограничений на гладкость решения [7, 10].

Рассматриваемая разностная схема представляет собой систему линейных уравнений, которую можно решить на основе итераций. Двухсеточный метод является быстрым и эффективным методом для решения краевых задач, в том числе и нелинейных (см., например, [5, 11–14] и приведенную там библиографию). Идея двухсеточного метода заключается в предварительном решении задачи на более грубой вспомогательной сетке с последующей интерполяцией найденного решения на исходную сетку. Найденное на основе интерполяции сеточное решение далее принимается за начальное приближение для итераций на исходной сетке, что и приводит к уменьшению числа арифметических действий. Таким образом, возникает необходимость в ε -равномерной интерполяции разностного решения с сохранением

полученной точности схемы на вспомогательной сетке [14–16]. При использовании двухсеточного алгоритма также можно практически без дополнительных вычислительных затрат повысить точность решения разностной схемы, если использовать решение на вспомогательной сетке для построения численного решения с помощью метода экстраполяции Рундсона [14, 15, 17].

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную сингулярно возмущенную эллиптическую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} - c(x, y)u &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \\ u(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega = (0, 1)^2$, $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$, c, f, g – достаточно гладкие функции,

$$c(x, y) \geq 2\gamma > 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (2)$$

Известно [1, 2, 6], что при выполнении условий (2) решение задачи (1) является равномерно ограниченным и имеет пограничные слои у границ $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$, $y = 1$.

В соответствии с [2], если $f, c \in C^{4,\lambda}(\bar{\Omega})$, $g \in C^{4,\lambda}(\partial\Omega)$ и выполнены условия согласования [8], то решение задачи (1) имеет регулярные экспоненциальные пограничные слои ширины $O(\sqrt{\varepsilon})$ вблизи $\partial\Omega$ и может быть представлено в виде

$$u = v + \sum_{i=1}^4 w_i + \sum_{i=1}^4 z_i,$$

где

$$\|v^{(k,j)}\| \leq C \left(1 + \varepsilon^{1-k/2-j/2}\right), \quad 0 \leq k + j \leq 4,$$

$$|w_1(x, y)| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}y}, \quad |w_2(x, y)| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}x},$$

$$|w_3(x, y)| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-y)}, \quad |w_4(x, y)| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-x)},$$

$$\max\{\|w_i^{(k,j)}\|, \|z_i^{(k,j)}\|\} \leq C\varepsilon^{-k/2-j/2}, \quad 0 \leq k + j \leq 4,$$

$$\|w_i^{(k,0)}\| \leq C \left(1 + \varepsilon^{1-k/2}\right), \quad i = 1, 3,$$

$$\|w_i^{(0,k)}\| \leq C \left(1 + \varepsilon^{1-k/2}\right), \quad i = 2, 4, \quad 0 \leq k + j \leq 4,$$

$$\|z_1(x, y)\| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}y}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}x}, \quad \|z_2(k, j)\| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-y)}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}x},$$

$$\|z_3(k, j)\| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-y)}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-x)}, \quad \|z_4(k, j)\| \leq Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}y}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-x)},$$

$$f^{(k,j)} = \frac{\partial^{(k+j)} f}{\partial x^k \partial y^j}.$$

Здесь и далее через C (возможно с индексами) обозначаем положительные постоянные, не зависящие от ε и числа шагов.

Для достижения ε -равномерной сходимости разностной схемы для задачи (1) используем схему центральных разностей на сетке Шишкина.

Зададим в области $\bar{\Omega}$ кусочно-равномерную сетку [6]:

$$\Omega_N = \{(x_i, y_j), i, j = \overline{0, N}, h_i = x_i - x_{i-1}, \tau_j = y_j - y_{j-1}, x_0 = 0, x_N = 1, y_0 = 0, y_N = 1\},$$

где

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{4\sigma_x}{N}, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{4}, \quad \frac{3N}{4} < i \leq N; \quad h_i = \frac{2(1-2\sigma_x)}{N}, \quad \frac{N}{4} < i \leq \frac{3N}{4}, \\ \tau_j &= \frac{4\sigma_y}{N}, \quad 1 \leq j \leq \frac{N}{4}, \quad \frac{3N}{4} < j \leq N; \quad \tau_j = \frac{2(1-2\sigma_y)}{N}, \quad \frac{N}{4} < j \leq \frac{3N}{4}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_x = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\mu} \ln N \right\}, \quad \sigma_y = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\mu} \ln N \right\}, \quad 0 < \mu < \sqrt{2\gamma}.$$

На сетке Ω_N выпишем схему с использованием центральных разностей

$$\begin{aligned} &\frac{2\varepsilon}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{u_{i+1,j}^N - u_{i,j}^N}{h_{i+1}} - \frac{u_{i,j}^N - u_{i-1,j}^N}{h_i} \right) + \\ &\quad + \frac{2\varepsilon}{\tau_j + \tau_{j+1}} \left(\frac{u_{i,j+1}^N - u_{i,j}^N}{\tau_{j+1}} - \frac{u_{i,j}^N - u_{i,j-1}^N}{\tau_j} \right) - \\ &\quad - c(x_i, y_j) u_{i,j}^N = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega_N, \\ &\quad u_{i,j}^N = g(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_N = \Gamma \cap \Omega_N. \end{aligned} \quad (4)$$

Определим норму непрерывной функции z и норму сеточной функции z^N соответственно по формулам

$$\|z\| = \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |z(x,y)|, \quad \|z^N\|_N = \max_{0 \leq i,j \leq N} |z_{i,j}^N|.$$

Пусть $[u]_{\Omega_N}$ – проекция функции непрерывного аргумента $u(x,y)$ на сетку Ω_N . В соответствии с [2] выполнено неравенство

$$\|u^N - [u]_{\Omega_N}\|_N \leq C_1 \Delta_N, \quad \Delta_N = \ln^2 N / N^2. \quad (5)$$

В настоящей работе исследуем реализацию схемы (4) двухсеточным методом для задачи (1) с повышением точности на основе экстраполяции Ричардсона и использованием ε -равномерной интерполяционной формулы.

2. Двухсеточный метод

Решение схемы (4) можно находить на основе итераций

$$u^{(m+1)} = G(u^{(m)}), \quad (6)$$

где $u^{(0)}$ задано. Матрица системы (4) является M -матрицей, что обеспечивает сходимость многих итерационных методов [18, 19]. Пусть для решения системы (4) применяется сходящийся итерационный метод, для которого справедлива оценка сходимости итераций

$$\|u^{(m+1)} - u^N\|_N \leq q \|u^{(m)} - u^N\|_N, \quad q < 1. \quad (7)$$

Пусть $\|u^{(0)} - u^N\|_N \leq \delta$, тогда, рассуждая аналогично [15], получим, что для разрешения схемы (4) потребуется

$$M_N \approx d N^2 \log_q (\Delta_N / \delta) \quad (8)$$

арифметических действий, если предположить, что для реализации одной итерации необходимо выполнить dN^2 арифметических действий (пропорционально N^2).

Теперь рассмотрим двухсеточный метод для нахождения решения разностной схемы (4). Введем сетку Ω_n такую же по структуре и с такими же параметрами σ_x и σ_y , как Ω_N , только с намного меньшим количеством узлов n , $n \ll N$, получив таким образом вложенные сетки. Считаем, что $N = kn$.

В соответствии с идеей двухсеточного метода предварительно с использованием итерационного метода (6) решаем задачу (1) на сетке Ω_n .

Далее необходимо найденное сеточное решение интерполировать в узлы исходной сетки Ω_N . При этом точность интерполяционной формулы должна быть не ниже точности используемой разностной схемы.

Пусть $I_J(v^n, x, y)$ – интерполянт сеточной функции v^n в области $\bar{\Omega}$ и справедлива оценка погрешности

$$\|I_J([u]_{\Omega_n, \sigma_N}, x, y) - u\| \leq C_2 \Delta_{\text{int}, n}, \quad \Delta_{\text{int}, n} \leq \Delta_n, \quad (9)$$

где $u(x, y)$ – решение задачи (1).

Вычислим, рассуждая аналогично [15], необходимое количество арифметических действий двухсеточного метода:

$$M_{nN} \approx d n^2 \log_q \frac{\Delta_n}{\delta} + d N^2 \log_q \frac{\Delta_N}{\Delta_n} + J_n, \quad (10)$$

где J_n – количество арифметических действий, необходимых для интерполяции.

Сравнивая (8), (10), оценим выигрыш в числе арифметических действий при использовании двухсеточного метода:

$$M_N - M_{nN} \approx d(N^2 - n^2) \log_q (\Delta_n / \delta) - J_n.$$

Теперь оценим относительный выигрыш в количестве арифметических действий. Считая, что для реализации метода интерполяции необходимо $J_n = d_I(N - n)$ действий (пропорционально $N - n$), и учитывая (8), (10), получим

$$1 - \frac{M_{nN}}{M_N} = \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) \frac{\frac{d}{d_I} \log_q (\Delta_n / \delta) - 1}{\frac{d}{d_I} \log_q (\Delta_N / \delta)} = \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) \Psi(N). \quad (11)$$

Покажем, что $\Psi(N)$ из представления (11) удовлетворяет неравенству

$$0 < \Psi(N) < 1.$$

Представим $\Psi(N)$ как

$$\Psi(N) = \left(\log_q \left(\frac{\Delta_n}{\delta} \right) - \frac{d_I}{d} \right) / \left(\log_q \left(\frac{\Delta_N}{\delta} \right) \right). \quad (12)$$

Тогда

$$\exists N_0 : \forall N \geq N_0 \quad \Delta_N < \delta,$$

следовательно, знаменатель в (12) положителен. А так как

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \Delta_n < \delta q^{d_I/d+1},$$

что означает выполнение неравенства

$$\log_q (\Delta_n/\delta) > d_I/d + 1,$$

следовательно, числитель в (12) также положителен.

Оценка $\Psi(N) < 1$ следует из того, что $\Delta_N < \Delta_n$.

Таким образом, получаем, что

$$1 - \frac{M_{nN}}{M_N} \leq 1 - \frac{n^2}{N^2}.$$

Найдем теперь предел $\Psi(N)$ при $N \rightarrow \infty$. Учитывая, что $N = kn$ и $\Delta_N = \xi^2/N^2$, где $\xi = (\mu\sigma)/(2\sqrt{\varepsilon})$, получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln q} \frac{\delta}{\Delta_n} \frac{\Delta'_n}{\delta} \right) : \left(\frac{1}{\ln q} \frac{\delta}{\Delta_N} \frac{\Delta'_N}{\delta} \right) = 1.$$

Следовательно, относительный выигрыш в количестве арифметических действий от использования двухсеточного метода ограничен величиной $1 - n^2/N^2$, но при увеличении числа узлов N стремится к этой же величине.

3. Экстраполяция Ричардсона

Исследуем экстраполяцию Ричардсона для повышения точности разностной схемы при использовании двухсеточного метода. Метод экстраполяции Ричардсона для сингулярно возмущенных эллиптических задач исследовался, например, в работах [4, 17, 20]. Рассмотрим случай, когда вспомогательная сетка Шишкина имеет вид (3) и содержит в k раз меньше сеточных интервалов по каждому направлению, чем исходная сетка, где $k > 1$ – целое число.

Решение u^N схемы центральных разностей (4) вычисляется на сетке Ω_N . Для повышения точности будем также использовать решение этой схемы на сетке Ω_n , которая содержит n сеточных интервалов и имеет те же параметры σ_x , σ_y , что и сетка Ω_N . Эти сетки вложены так, что $\Omega_n = \{(X_l, Y_m)\} \subset \Omega_N = \{(x_i, y_j)\}$. Очевидно, что сетку Ω_N можно получить из Ω_n делением каждой ячейки на k равных частей по каждому направлению.

Обозначим решение схемы (4) на Ω_n через u^n , и пусть

$$k_n = -\frac{n^2}{N^2 - n^2} = -\frac{1}{k^2 - 1}, \quad k_N = \frac{N^2}{N^2 - n^2} = \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

В соответствии с методом экстраполяции Ричардсона зададим функцию u^{nN} на сетке Ω_N , приближающую решение $u(x, y)$ с более высоким порядком точности, чем u^N . Для этого сначала в узлах вспомогательной сетки Ω_n определим сеточную функцию u^{nN} следующим образом:

$$u^{nN}(X_l, Y_m) = k_n u^n(X_l, Y_m) + k_N u^N(X_l, Y_m), \quad (X_l, Y_m) \in \Omega_n.$$

В узлах исходной сетки Ω_N , не совпадающих с узлами сетки Ω_n , зададим сеточную функцию $u^{nN}(x_i, y_j)$, используя интерполяцию. Тогда для каждого узла $(x_i, y_j) \in \Omega_N$ определим

$$u^{nN}(x_i, y_j) = I_R([u^{nN}]_{\Omega_n}, x_i, y_j), \quad (13)$$

где $I_R(v^n, x, y)$ – интерполянт сеточной функции v^n в области Ω .

Отметим, что точность интерполяционной формулы в (13) должна быть ε -равномерной, порядка, не ниже порядка точности сеточной функции u^{nN} в узлах сетки $(X_l, Y_m) \in \Omega_n$, полученного в результате применения метода Ричардсона.

4. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} - 2u &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

где f соответствует решению

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{(1 - e^{-x/\sqrt{\varepsilon}})(1 - e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}})}{(1 - e^{-1/\sqrt{\varepsilon}})} \frac{(1 - e^{-y/\sqrt{\varepsilon}})(1 - e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}})}{(1 - e^{-1/\sqrt{\varepsilon}})} + \\ &\quad + \sin(\pi x) \sin(\pi y). \end{aligned} \quad (15)$$

В соответствии с (14) зададим σ_x и σ_y в (3), используя значение $\mu = 1$.

Решение задачи (14) находим на основе схемы (4). Начальное приближение для используемых итерационных методов задаем на основе известных граничных условий дифференциальной задачи (14) следующим образом:

$$u^{(0)}(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Omega_N.$$

Итерационный метод на сетке Ω_N завершаем, если выполнено условие

$$\|L^N u^{(m_N)} - f^N\|_N \leq \gamma \Delta_N,$$

тогда будет выполнена оценка $\|u^{(m_N)} - u^N\|_N \leq \Delta_N$.

Остановимся подробнее на выборе интерполяционных формул в (9), (13). Для этого обобщим интерполяционную формулу из [16] на двумерный случай и исследуем ее при $k = 3, 5$ и различном выборе функций $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$. Пусть $L_k(v, z_p, \dots, z_{p+k-1}, z)$ — многочлен Лагранжа с узлами $z_p, \dots, z_{p+k-1}$ и $[z_p, \dots, z_{p+k-1}]v$ — разделенная разность для функции $v(z)$, тогда

$$\begin{aligned} I_{\Phi, \Theta, k}(u, x, y) &= L_{k-1}(u_{\Phi, k}, y_l, \dots, y_{l+k-2}, y) + \\ &\quad + \frac{[y_l, \dots, y_{l+k-1}]u_{\Phi, k}}{[y_l, \dots, y_{l+k-1}]\Theta} \left(\Theta(y) - L_{k-1}(\Theta, y_l, \dots, y_{l+k-2}, y) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} u_{\Phi, k}(u, x) &= L_{k-1}(u, x_m, \dots, x_{m+k-2}, x) + \\ &\quad + \frac{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]u}{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]\Phi} \left(\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x_m, \dots, x_{m+k-2}, x) \right), \\ &\quad (x, y) \in [x_m, x_{m+k-1}] \times [x_l, x_{l+k-1}]. \end{aligned}$$

Отметим, что в случае, когда $\Phi(x) = x^{k-1}$ и $\Theta(y) = y^{k-1}$, получаем двумерную формулу полиномиальной интерполяции.

В работе [21] показано, что при $k = 2$ одномерная формула (16) имеет ε -равномерную точность $O(\ln N/N)$, а при $k = 3$ имеет точность $O(\ln^2 N/N^2)$. Проводя рассуждения, аналогичные [14], можно обобщить полученные оценки на двумерный случай интерполяционной формулы. В соответствии с (5) и (9) случай $k = 2$ не рассматриваем, так как погрешность метода интерполяции больше погрешности схемы (4).

В (13) необходима интерполяционная формула повышенного порядка точности, поэтому остановимся также на случае $k = 5$. В работе [21] показано, что при этом

формула будет иметь точность $O(\ln^4 N/N^4)$. Результаты численных экспериментов показывают, что данная оценка является ε -равномерной.

Выпишем формулу (16) при $k = 5$ для каждого узла $(x_i, y_j) \in \Omega_{N, \sigma_N}$, принадлежащего некоторой ячейке $S_{l,m} = [X_{l-2}, X_{l+2}] \times [Y_{m-2}, Y_{m+2}]$, где $(X_p, Y_q) \in \Omega_{n, \sigma_N}$. Считаем, что n кратно четырем и не меньше 16. Имеем

$$\begin{aligned} I_R([u^{nN}]_{\Omega_n}, x_i, y_j) = & \frac{u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-1}) - u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-2})}{(Y_{m-1} - Y_{m-2})} (y_j - Y_{m-2}) + \\ & + \frac{u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_m) - 2u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-1}) + u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-2})}{(Y_m - Y_{m-2})(Y_m - Y_{m-1})} (y_j - Y_{m-2})(y_j - Y_{m-1}) + \\ & + \left(u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m+1}) - 3u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_m) + 3u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-1}) - \right. \\ & \left. - u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-2}) \right) \frac{(y_j - Y_{m-2})(y_j - Y_{m-1})(y_j - Y_m)}{(Y_{m+1} - Y_{m-2})(Y_{m+1} - Y_{m-1})(Y_{m+1} - Y_m)} + \\ & + G_5^y \left(-\frac{\Theta_{m-1} - \Theta_{m-2}}{Y_{m-1} - Y_{m-2}} (y_j - Y_{m-2}) - \frac{\Theta_m - 2\Theta_{m-1} + \Theta_{m-2}}{2(Y_m - Y_{m-1})^2} (y_j - \right. \\ & \left. - Y_{m-2})(y_j - Y_{m-1}) - \frac{\Theta_{m+1} - 3\Theta_m + 3\Theta_{m-1} - \Theta_{m-2}}{6(Y_m - Y_{m-1})^3} (y_j - Y_{m-2})(y_j - \right. \\ & \left. - Y_{m-1})(y_j - Y_m) + \Theta(y_j) - \Theta_{m-2} \right) + u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-2}), \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_{\Phi}^{nN}(x_i, y_j) = & u^{nN}(X_{l-2}, y_j) + \frac{u^{nN}(X_{l-1}, y_j) - u^{nN}(X_{l-2}, y_j)}{X_{l-1} - X_{l-2}} (x_i - X_{l-2}) + \\ & + \left(u^{nN}(X_l, y_j) - 2u^{nN}(X_{l-1}, y_j) + u^{nN}(X_{l-2}, y_j) \right) \frac{(x_i - X_{l-2})(x_i - X_{l-1})}{(X_l - X_{l-2})(X_l - X_{l-1})} + \\ & + \left(u^{nN}(X_{l+1}, y_j) - 3u^{nN}(X_l, y_j) + 3u^{nN}(X_{l-1}, y_j) - \right. \\ & \left. - u^{nN}(X_{l-2}, y_j) \right) \frac{(x_i - X_{l-2})(x_i - X_{l-1})(x_i - X_l)}{(X_{l+1} - X_{l-2})(X_{l+1} - X_{l-1})(X_{l+1} - X_l)} + \\ & + G_5^x \left(-\frac{\Phi_{l-1} - \Phi_{l-2}}{X_{l-1} - X_{l-2}} (x_i - X_{l-2}) - \frac{\Phi_l - 2\Phi_{l-1} + \Phi_{l-2}}{2(X_l - X_{l-1})^2} (x_i - X_{l-2})(x_i - X_{l-1}) - \right. \\ & \left. - \frac{\Phi_{l+1} - 3\Phi_l + 3\Phi_{l-1} - \Phi_{l-2}}{6(X_l - X_{l-1})^3} (x_i - X_{l-2})(x_i - X_{l-1})(x_i - X_l) + \Phi(x_i) - \Phi_{l-2} \right), \\ G_5^y = & \frac{u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m+2}) - 4u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m+1}) + 6u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_m) - 4u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-1}) + u_{\Phi}^{nN}(x_i, Y_{m-2})}{\Theta_{m+2} - 4\Theta_{m+1} + 6\Theta_m - 4\Theta_{m-1} + \Theta_{m-2}}, \\ G_5^x = & \frac{u^{nN}(X_{l+2}, y_j) - 4u^{nN}(X_{l+1}, y_j) + 6u^{nN}(X_l, y_j) - 4u^{nN}(X_{l-1}, y_j) + u^{nN}(X_{l-2}, y_j)}{\Phi_{l+2} - 4\Phi_{l+1} + 6\Phi_l - 4\Phi_{l-1} + \Phi_{l-2}}, \\ & \Phi_l = \Phi(X_l), \quad \Theta_m = \Theta(Y_m). \end{aligned}$$

Так как сетка (3) является кусочно-равномерной, то условия, налагаемые на количество узлов вспомогательной сетки в (17), гарантируют равномерный шаг внутри каждой ячейки. А сгущение сетки (3) в областях больших градиентов интерполируемой функции обеспечивает оценки точности равномерные по ε .

Табл. 1

Нормы погрешности $I_{\Phi, \Theta, 3}$ при $\Phi(x) = x^2$ и $\Theta(y) = y^2$

ε	N					
	32	64	128	256	512	1024
1	4.98e-4	6.08e-5	7.48e-6	9.27e-7	1.15e-7	1.44e-8
10^{-1}	3.00e-4	3.78e-5	4.65e-6	5.77e-7	7.18e-8	8.96e-9
10^{-2}	9.18e-3	1.38e-3	1.98e-4	2.65e-5	3.44e-6	4.37e-7
10^{-3}	1.05e-1	3.28e-2	4.95e-3	7.61e-4	1.06e-4	1.39e-5
10^{-4}	1.05e-1	3.72e-2	8.65e-3	1.93e-3	3.91e-4	7.23e-5
10^{-5}	1.05e-1	3.72e-2	8.65e-3	1.93e-3	3.91e-4	7.23e-5
10^{-6}	1.05e-1	3.72e-2	8.65e-3	1.93e-3	3.91e-4	7.23e-5

Табл. 2

Нормы погрешности $I_{\Phi, \Theta, 5}$ при $\Phi(x) = x^4$ и $\Theta(y) = y^4$

ε	N					
	32	64	128	256	512	1024
1	9.11e-6	2.74e-7	8.23e-9	2.51e-10	7.73e-12	2.40e-13
10^{-1}	1.39e-5	4.08e-7	1.27e-8	4.01e-10	1.27e-11	3.98e-13
10^{-2}	1.21e-3	5.46e-5	1.93e-6	6.88e-8	2.30e-9	7.43e-11
10^{-3}	3.43e-2	6.24e-3	4.52e-4	1.69e-5	6.35e-7	2.21e-8
10^{-4}	3.43e-2	7.32e-3	1.06e-3	8.96e-5	5.50e-6	3.38e-7
10^{-5}	3.43e-2	7.32e-3	1.06e-3	8.96e-5	5.52e-6	3.38e-7
10^{-6}	3.43e-2	7.32e-3	1.06e-3	8.96e-5	5.59e-6	3.45e-7

В табл. 1 при различных значениях N и ε приведены нормы погрешности метода интерполяции (16) при $k = 3$ в случае $\Phi(x) = x^2$, $\Theta(y) = y^2$ для функции (15). Отметим, что в случае

$$\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}$$

погрешность получается того же порядка.

Из табл. 1 следует, что точность формулы (16) при $k = 3$ в случае $\Phi(x) = x^2$ и $\Theta(y) = y^2$ даже выше, чем теоретически обоснованная оценка $O(\ln^2 N/N^2)$, и близка к $O(\ln^3 N/N^3)$. Следовательно, если применить данную интерполяционную формулу, то будет выполнено неравенство (9).

В табл. 2 при различных значениях N и ε приведены нормы погрешности метода интерполяции (16) при $k = 5$ в случае $\Phi(x) = x^4$, $\Theta(y) = y^4$ для функции (15).

В табл. 3 при различных значениях N и ε приведены нормы погрешности метода интерполяции (16) при $k = 5$ в случае

$$\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}$$

для функции (15).

Из табл. 2 и 3 следует, что точность формулы (16) при $k = 5$ в случае выбора $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ с учетом вида областей больших градиентов интерполируемой функции выше, чем $O(\ln^4 N/N^4)$, и близка к $O(\ln^5 N/N^5)$. Поэтому в (17) возьмем

$$\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}.$$

Исследуем реализацию схемы (4) на основе явного метода Зейделя [19].

Пятиточечную схему (4) можно в общем виде представить как

$$a_{i,j} u_{i-1,j}^N + b_{i,j} u_{i,j-1}^N + c_{i,j} u_{i+1,j}^N + d_{i,j} u_{i,j+1}^N - e_{i,j} u_{i,j}^N = f_{i,j}^N, \quad 0 < i, j < N.$$

Табл. 3

Нормы погрешности $I_{\Phi, \Theta, 5}$ при $\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}$ и $\Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}$

ε	N					
	32	64	128	256	512	1024
1	9.52e-6	2.93e-7	8.86e-9	2.70e-10	8.38e-12	3.90e-13
10^{-1}	1.27e-5	4.37e-7	1.38e-8	4.22e-10	1.31e-11	4.08e-13
10^{-2}	4.14e-5	1.29e-6	4.16e-8	1.31e-9	4.10e-11	1.28e-12
10^{-3}	2.82e-4	5.68e-6	1.61e-7	4.90e-9	1.50e-10	4.62e-12
10^{-4}	2.78e-3	2.41e-4	7.76e-6	1.79e-7	4.17e-9	1.01e-10
10^{-5}	4.03e-3	4.86e-4	3.55e-5	1.64e-6	4.80e-8	1.23e-9
10^{-6}	4.47e-3	5.51e-4	4.35e-5	2.84e-6	1.65e-7	6.56e-9

Табл. 4

Количество итераций односеточного и двухсеточного методов Зейделя, $\varepsilon = 10^{-4}$

n	N				
	32	64	128	256	512
16	13(7)	36(7)	113(7)	385(7)	1357(7)
32		30(15)	98(14)	341(13)	1219(13)
64			82(39)	296(35)	1082(33)
128				247(121)	942(108)
256					788(407)
	17	45	139	463	1605

Тогда векторно-матричная запись метода Зейделя будет следующей:

$$u^{(m)} = D^{-1} \left(f + Lu^{(m)} + Uu^{(m-1)} \right),$$

где

$$(Lv)_{i,j} = a_{i,j}v_{i-1,j} + b_{i,j}v_{i,j-1}, \quad (Dv)_{i,j} = e_{i,j}v_{i,j}, \quad (Uv)_{i,j} = c_{i,j}v_{i+1,j} + d_{i,j}v_{i,j+1}.$$

Результаты численных экспериментов для метода Зейделя при $\varepsilon = 10^{-4}$ приведены в табл. 4 и 5.

В табл. 4 при различных значениях N и n указано количество итераций двухсеточного метода на исходной сетке Ω_N , при этом в скобках приведено количество итераций на более редкой вспомогательной сетке Ω_n . В нижней строке указано число итераций односеточного метода в зависимости от N . Из таблицы следует, что применение двухсеточного метода приводит к существенному сокращению количества итераций на исходной сетке при $n = N/2$.

В табл. 5 при различных значениях N и n приведены нормы погрешности двухсеточного метода с экстраполяцией Ричардсона (17). В нижней строке для сравнения приведены нормы погрешности односеточного метода в зависимости от N . Из таблицы следует, что экстраполяция Ричардсона (17) повышает точность схемы до порядка не ниже $O(\ln^3 N/N^3)$.

Помимо метода Зейделя в качестве итерационного метода использовался метод последовательной верхней релаксации [19]:

$$u^{(m)} = \omega D^{-1} \left(f + Lu^{(m)} + Uu^{(m-1)} \right) + (1 - \omega)u^{(m-1)}$$

Табл. 5

Нормы погрешности односеточного метода Зейделя и двухсеточного метода Зейделя с экстраполяцией Ричардсона, $\varepsilon = 10^{-4}$

n	N				
	32	64	128	256	512
16	1.17e-3	4.23e-4	1.22e-4	2.98e-5	6.20e-6
32		2.74e-4	1.21e-4	4.62e-5	1.59e-5
64			4.16e-5	1.75e-5	6.71e-6
128				4.85e-6	1.87e-6
256					5.27e-7
	8.15e-3	3.15e-3	1.10e-3	3.62e-4	1.15e-4

где ω – итерационный параметр, а также метод Писмана – Речфорда (продольно-поперечных прогонок) [19]:

$$u^{(m-1/2)} = u^{(m-1)} + \tau \left(A_1 u^{(m-1/2)} + A_2 u^{(m-1)} - f \right),$$

$$u^{(m)} = u^{(m-1/2)} + \tau \left(A_1 u^{(m-1/2)} + A_2 u^{(m)} - f \right),$$

где τ – итерационный параметр,

$$(A_1 v)_{i,j} = a_{i,j} v_{i-1,j} - e'_{i,j} v_{i,j} + c_{i,j} v_{i+1,j},$$

$$(A_2 v)_{i,j} = b_{i,j} v_{i,j-1} - e''_{i,j} v_{i,j} + d_{i,j} v_{i,j+1}.$$

Здесь $e_{i,j} = e'_{i,j} + e''_{i,j}$, где $e'_{i,j}$ соответствует аппроксимации производных по направлению x , а $e''_{i,j}$ – по направлению y .

Использованы также итерации в подпространствах Крылова [22–24], а именно стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) и стабилизированный метод бисопряженных невязок (BiCRSTAB):

$$r^0 = f - Au^0, \quad p^0 = r^0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$s^n = r_n^{(q)} - \alpha_n^{(q)} Ap^n, \quad \alpha_n^{(q)} = \frac{(r^n, (A^T)^q r^0)}{(Ap^n, (A^T)^q r^0)},$$

$$u^{n+1} = u^n + \alpha_n^{(q)} p_n^{(q)} + \omega_n s^n, \quad \omega_n = \frac{(As^n, s^n)}{(As^n, As^n)},$$

$$p_{n+1}^{(q)} = r_{n+1}^{(q)} + \beta_n^{(q)} (p_n^{(q)} - \omega_n Ap_n^{(q)}), \quad \beta_n^{(q)} = \frac{[\alpha_n (r^{n+1}, (A^T)^q r^0)]}{[\omega_n (r^n, (A^T)^q r^0)]}.$$

Здесь $q = 0$ и 1 для методов BiCGSTAB и BiCRSTAB соответственно, номера итераций указаны в данном случае нижними индексами [22].

Остановимся подробнее на выборе итерационного параметра ω в методе последовательной верхней релаксации. Согласно [19], оптимальное значение релаксационного параметра есть

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_s}}, \quad (18)$$

где ρ_s – коэффициент подавления ошибки метода Зейделя.

В этом случае можно апостериорно выбрать значение ω_0 , используя следующий алгоритм автоматического определения итерационного параметра [19]. Сначала

Табл. 6

Сравнение количества итераций, $\varepsilon = 10^{-4}$

Метод	N				
	32	64	128	256	512
Зейделя	13(7) 17	30(15) 45	82(39) 139	247(121) 463	788(407) 1605
верхней релаксации	12(8) 15	23(15) 35	58(31) 95	106(81) 186	215(159) 330
Писмана – Речфорда	7(5) 11	14(12) 24	28(27) 54	58(60) 119	118(130) 259
BiCRSTAB	6(3) 7	10(6) 15	20(13) 31	41(25) 57	65(60) 98
BiCGSTAB	6(3) 7	11(6) 13	20(13) 28	36(26) 58	58(54) 93

в методе последовательной верхней релаксации проводятся итерации при значении $\omega = 1$ и на каждой итерации вычисляется значение

$$\rho_s^n = \frac{\|u^n - u^{n-1}\|}{\|u^{n-1} - u^{n-2}\|},$$

а также проверяется условие

$$|\rho_s^n - \rho_s^{n-1}| \leq \varepsilon_1 \quad (19)$$

при некоторой заданной малой величине ε_1 . Когда неравенство (19) выполняется, величина ρ_s^n принимается за приближенное значение ρ_s , после чего по формуле (18) определяется значение ω_0 , используемое на последующих итерациях. При этом предварительные итерации по методу Зейделя служат для получения достаточно приемлемого начального приближения.

В [25] показано, что предпочтительнее всего по количеству итераций выглядит автоматический выбор итерационного параметра ω .

В табл. 6 при $\varepsilon = 10^{-4}$ проведено сравнение исследуемых итерационных методов. Двухсеточный метод использовался в случае $n = N/2$. Для метода последовательной верхней релаксации итерационный параметр ω выбирался в соответствии с описанным выше алгоритмом автоматического определения значения, для метода Писмана – Речфорда итерационный параметр $\tau = 8/N$.

Применение методов последовательной верхней релаксации, Писмана – Речфорда, стабилизированных методов бисопряженных направлений и градиентов привело к уменьшению количества итераций по сравнению с методом Зейделя. Повышение точности на основе экстраполяции Ричардсона не зависит от конкретного итерационного метода.

В табл. 7 при различных значениях ε для стабилизированного метода бисопряженных градиентов приведено количество итераций и время выполнения двухсеточного (сверху) и односеточного (снизу) методов.

В табл. 8 при различных значениях ε и N для стабилизированного метода бисопряженных градиентов приведено преимущество по времени выполнения двухсеточного метода перед односеточным в процентном соотношении:

$$\Delta T = 100 \left(1 - \frac{T_{\text{TGM}}}{T_{\text{OGM}}} \right),$$

где T_{TGM} – время выполнения двухсеточным методом, T_{OGM} – время выполнения односеточным методом.

Табл. 7

Количество итераций ($\aleph$) и время выполнения (T) двухсеточного и односеточного методов

$\varepsilon = 10^{-1}$					$\varepsilon = 10^{-2}$				
N	256	512	1024	2048	N	256	512	1024	2048
$\aleph$	121(121) 259	306(259) 570	584(570) 1437	1443(1437) 4623	$\aleph$	112(81) 185	207(185) 442	499(442) 901	1212(901) 2251
T	2.01 3.47	28.18 45.92	244.97 492.94	2790.42 7194.04	T	1.79 2.56	19.37 36.55	206.24 317.42	2244.99 3521.70

$\varepsilon = 10^{-3}$					$\varepsilon = 10^{-4}$				
N	256	512	1024	2048	N	256	512	1024	2048
$\aleph$	47(37) 72	87(72) 148	177(148) 430	318(430) 795	$\aleph$	36(26) 58	58(54) 93	108(97) 207	189(179) 434
T	0.85 1.04	8.44 12.40	73.98 154.29	661.48 1246.48	T	0.69 0.88	5.94 7.94	46.79 74.27	371.31 684.25

Табл. 8

Преимущество ΔT двухсеточного алгоритма по времени выполнения в процентах

ε	N			
	256	512	1024	2048
10^{-1}	42.04	38.62	50.30	61.21
10^{-2}	30.07	46.99	35.03	36.25
10^{-3}	18.04	31.93	52.05	46.93
10^{-4}	21.93	25.10	37.00	45.73
10^{-5}	20.81	32.83	37.19	44.04

Табл. 9

Скорость сходимости в случае односеточного метода Писмана – Речфорда

ε	N			
	32	64	128	256
10^{-1}	2.001	2.000	2.000	2.000
10^{-2}	1.988	1.997	2.000	2.001
10^{-3}	1.508	1.965	1.991	1.998
10^{-4}	1.370	1.517	1.604	1.656
10^{-5}	1.370	1.517	1.604	1.656
CR_t	1.356	1.474	1.555	1.615

Из табл. 7, 8 следует, что с увеличением N выигрыш от использования двухсеточного метода растет, что соответствует полученной оценке (11).

В табл. 9 приведена скорость сходимости схемы (4) в зависимости от ε и N при ее реализации односеточным методом Писмана – Речфорда:

$$CR = \log_2 \frac{D_N}{D_{2N}}, \quad D_N = \|u^N - [u]_{\Omega_N}\|.$$

В последней строке табл. 9 приведена теоретическая оценка скорости сходимости CR_t схемы (4) в зависимости от N , соответствующая оценке погрешности (5).

В табл. 10 приведены значения скорости сходимости схемы (4) в зависимости от ε и N при ее реализации двухсеточным методом Писмана – Речфорда с использованием экстраполяции Ричардсона при $n = N/2$. В последней строке табл. 10

Табл. 10

Скорость сходимости в случае двухсеточного метода Писмана–Речфорда при использовании экстраполяции Ричардсона

ε	N			
	32	64	128	256
10^{-1}	4.727	4.737	4.538	4.158
10^{-2}	2.123	2.090	2.297	2.354
10^{-3}	2.939	4.261	3.694	2.590
10^{-4}	2.639	3.368	3.139	3.200
10^{-5}	2.638	3.362	3.117	3.225
CR_t	2.034	2.211	2.333	2.422
	2.712	2.948	3.110	3.229

приведены теоретические оценки скорости сходимости CR_t схемы (4) с экстраполяцией Ричардсона в зависимости от N , соответствующие оценке $O(\ln^3 N/N^3)$ и $O(\ln^4 N/N^4)$.

Итак, применение двухсеточного метода на сетке Шишкина приводит к выигрышу в количестве арифметических действий, а использование экстраполяции Ричардсона повышает точность разностной схемы на порядок. Исследовано обобщение одномерной ε -равномерной интерполяции на двумерный случай. С увеличением числа узлов преимущество двухсеточного метода увеличивается. Исследованы методы Зейделя, последовательной верхней релаксации, Писмана–Речфорда и стабилизированные методы бисопряженных градиентов и направлений, наибольшую скорость сходимости среди которых показали два последних.

Автор благодарит профессора А.И. Задорина и профессора В.П. Ильина за полезные советы и интересные обсуждения при подготовке данной работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00618, 15-01-06584).

Summary

S.V. Tikhovskaya. Investigation of a Two-Grid Method of Improved Accuracy for the Elliptic Reaction–Diffusion Equation with Boundary Layers.

A two-grid method for the elliptic equation with a small parameter ε multiplying the highest derivative is investigated. The ε -uniformly convergent difference scheme on the Shishkin mesh is considered. To resolve the difference scheme, a two-grid method with ε -uniform interpolation formula is used. To increase the accuracy of the scheme, the Richardson extrapolation in the two-grid method is applied. The results of numerical experiments are discussed. Various iterative methods for implementation of the two-grid algorithm are suggested.

Keywords: elliptic reaction–diffusion equation, singular perturbation, Shishkin mesh, two-grid method, Richardson extrapolation, uniform convergence.

Литература

1. *Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. – Singapore: World Scientific, 1996. – 163 p.
2. *Clavero C., Gracia J.L., O’Riordan E.* A parameter robust numerical method for a two dimensional reaction-diffusion problem // Math. Comput. – 2005. – V. 74, No 252. – P. 1743–1758. – doi: 10.1090/S0025-5718-05-01762-X.

3. *Roos H.G., Stynes M., Tobiska L.* Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
4. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009. – 408 p.
5. *Angelova I.T., Vulkov L.G.* A two-grid method on layer-adapted meshes for a semilinear 2-D reaction-diffusion problem // Lecture Notes in Computer Science. – 2010. – V. 5910. – P. 703–710. – doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_84.
6. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 232 с.
7. *Андреев В.Б.* О точности сеточных аппроксимаций негладких решений сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в квадрате // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 7. – С. 954–966.
8. *Han H., Kellogg R.B.* Differentiability properties of solutions of the equation $-\varepsilon^2 \Delta u + ru = f(x, y)$ in a square // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – V. 21, No 2. – P. 394–408. – doi:10.1137/0521022.
9. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859. – doi: 10.1016/0041-5553(69)90038-X.
10. *Ершова Т.Я.* О решении задачи Дирихле для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в квадрате на сетке Бахвалова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 2009. – № 4. – С. 7–14. – doi: 10.3103/S0278641909040013.
11. *Axelsson O., Layton W.* A two-level discretization of nonlinear boundary value problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – V. 33 – P. 2359–2374. – doi: 10.1137/S0036142993247104.
12. *Xu J.* A novel two-grid method for semilinear elliptic equation // SIAM J. Sci. Comput. – 1994. – V. 15. – P. 231–237. – doi: 10.1137/0915016.
13. *Vulkov L.G., Zadorin A.I.* Two-Grid Algorithms for the Solution of 2D Semilinear Singularly perturbed convection-diffusion equations using an exponential finite difference scheme // AIP Conf. Proc. – 2009. – V. 1186. – P. 371–379. – doi: 10.1063/1.3265351.
14. *Zadorin A.I., Tikhovskaya S.V., Zadorin N.A.* A two-grid method for elliptic problem with boundary layers // Appl. Numer. Math. – 2015. – V. 93. – P. 270–278. – doi: 10.1016/j.apnum.2014.06.003.
15. *Тиховская С.В.* Двухсеточный метод для эллиптического уравнения с пограничными слоями на сетке Шишкина // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 4. – С. 49–56.
16. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Сиб. электр. матем. изв. – 2012. – Т. 9. – С. 1–11.
17. *Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Метод Рундсона высокого порядка точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7 – С. 980–989.
18. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
19. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2001. – 318 с.
20. *Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии // Труды ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 255–271.

21. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Интерполяция функций с погранслойнными составляющими и ее применение в двухсеточном методе // Сиб. электр. матем. изв. – 2011. – Т. 8. – С. 247–267.
22. *Ильин В.П.* Методы и технологии конечных элементов. – Новосибирск: Изд-во ИВ-МиМГ СО РАН, 2007. – 371 с.
23. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. – N. Y.: PWS Publ. Co, 1996. – 448 p.
24. *Ильин В.П.* Методы бисопряженных направлений в подпространствах Крылова // Сиб. журн. индустр. матем. – 2008. – Т. 11, № 4 (36). – С. 47–60. – doi: 10.1134/S1990478910010102.
25. *Тиховская С.В.* Разработка разностных схем на сгущающихся сетках для краевых задач с пограничным слоем: Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. – Омск, 2013. – 105 с.

Поступила в редакцию
23.01.15

Тиховская Светлана Валерьевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, г. Омск, Россия.

E-mail: *s.tihovskaya@yandex.ru*