

А. М. Балонишников, В. А. Балонишникова

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБМЕННЫХ КУРСОВ ОСНОВНЫХ ВАЛЮТ

*В статье представлено исследование курса рубля по отношению к американскому доллару и евро согласно котировке Центрального банка России. Полученные авторами с помощью компьютерного анализа результаты указывают на хаотичность курсов этих валют на зарубежных валютных биржах.*

Исследование хаоса в поведении экономических систем впервые принято в работах Слуцкого [18], Юла [21] и Фриша [11]. Как отмечается в [18], если простые нелинейные уравнения дополняются воздействиями типа белого шума, то можно воспроизвести некоторые макроскопические циклы. Тем не менее одни экономисты, в частности, Хикс [12], сомневались в плодотворности такого подхода, считая его отображением нашего невежества в понимании экономического процесса. После выхода в свет работы американского гидрометеоролога Лоренца [14] стало ясно, что хаотическое поведение как реальных, так и модельных систем может быть объяснено специальным видом нелинейностей, входящих в законы движения эволюционирующих систем, причем шумы в этих законах могут полностью отсутствовать. В этом случае принято говорить о детерминированном хаосе. В одной из немногих работ по исследованию хаоса в экономике [16] подчеркивается, что очень важно знать, в какой степени процесс является детерминированным хаосом или же стохастическим процессом со случайным воздействием типа белого шума (стохастический хаос). Это имеет не только экономическое, но и политическое значение. Если флуктуации в бизнес-цикле являются следствием нелинейностей, то можно рекомендовать руководителям бирж проводить антициклическую политику, которая изменяет управляющие параметры системы. Если же флуктуации появляются

вследствие шумов, то вмешательство извне по изменению управляющих параметров может привести к ухудшению предсказуемости экономической системы. Отметим, что иногда процесс является регулярным и полностью предсказуемым, хотя внешне он может выглядеть как непериодический и непредсказуемый. Типичный пример тому — движение больших планет солнечной системы, которое в принципе предсказуемо на сколь угодно большой промежуток времени.

Начало математическому исследованию хаоса в курсах валют было положено в работах Брока [6–9], в которых исследованы курсы валют на американских и канадских биржах. Надежными показателями детерминированного хаоса (после фильтрации шумов), исключающими регулярное движение, являются положительность старшего показателя Ляпунова или положительность энтропии Колмогорова. Результаты расчета старшего показателя Ляпунова, проведенного с помощью компьютерной программы [20], позволили сделать вывод о возможности детерминированного хаоса в курсах валют. Отметим, что теория детерминированного хаоса сформулирована для бесконечных временных рядов. Реальные ряды экономических данных, в частности, для курсов валют, имеют ограниченное число членов ряда, нельзя, по-видимому, также полностью профильтровать шумы. Анализ работ по данному направлению представлен в [15]. Одна из последних таких работ — это исследование индийских экономистов-

математиков [10], которые выявили для обменных курсов валют 12 стран Южной Азии как наличие детерминированного хаоса, так и наличие нелинейностей. Однако авторам неизвестны соответствующие публикации в России, в частности, нет ссылок на такие исследования в работе московских математиков [3]. По-видимому, эти исследования проводятся в отдельных крупных банках финансовыми аналитиками, однако, они представляют собой ноу-хау данного банка.

В настоящей статье было проведено исследование на наличие хаотического поведения во временных рядах курсов доллара США к рублю и евро к рублю с использованием данных, представленных на сайте Центробанка России. Для определенности были выбраны данные с 1 января по 31 мая 2007 г. включительно, промежутков между соседними членами ряда — 1 сутки.

### Расчет спектра мощности

Согласно [4], чтобы отличить хаос от многопериодического (регулярного) движения, часто прибегают к расчету спектра мощности процесса. Для этого осуществляют Фурье-преобразование переменной  $x(t)$ :

$$x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{i\omega t} x(t) dt, \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $i$  — мнимая единица;  $\omega$  — циклическая частота.

Для многопериодического движения спектр мощности:

$$P(\omega) = |x(\omega)|^2 \quad (2)$$

состоит из дискретных линий на определенных частотах, тогда как для хаотического движения, которое апериодично, представляется в спектре мощности сплошной широкой полосой на низких частотах. В случае временных рядов, где переменная времени  $t$  принимает дискретный набор значений  $t = \Delta t \cdot j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$  ( $N$  — число членов ряда;  $\Delta t$  — промежуток времени между ближайшими отсчетами), вместо преоб-

разования Фурье (1) используют дискретное преобразование Фурье [16]:

$$X(f_k) = T \sum_{j=0}^{N-1} x(\Delta t \cdot j) \exp\left(\frac{j2\pi i k}{N}\right), \quad (3)$$

где  $i$  — мнимая единица;  $T = \Delta t \cdot N$ ; частота  $f_k = k/(NT)$ ;  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

В данной статье использовались соотношения (3) и (2), последнее — для расчета спектров мощности временных рядов курсов валют. Эти расчет и графическое представление результатов осуществлялись в системе MATLAB 6 [18].

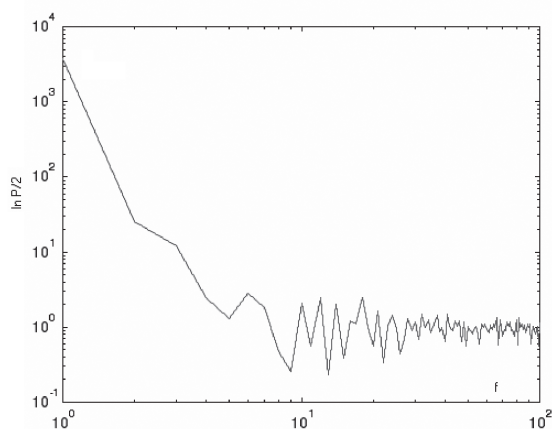


Рис. 1. Зависимость спектра мощности  $P(f)$  от частоты  $f$  [сутки<sup>-1</sup>] для временного ряда обменного курса доллара к рублю

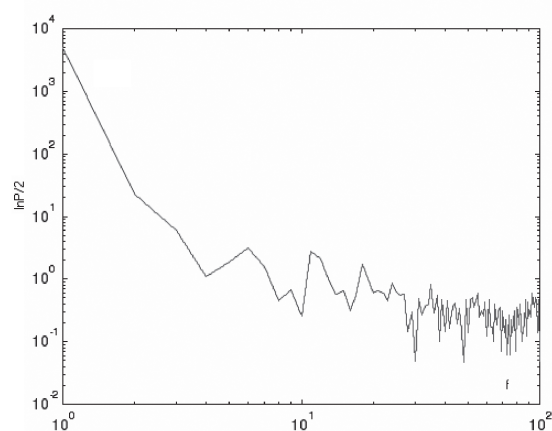


Рис. 2. Зависимость  $P(f)$  от частоты  $f$  [сутки<sup>-1</sup>] для временного ряда обменного курса евро к рублю

Данные расчетов, представленные на рис. 1 и 2, показывают, что мы имеем дело скорее с хаотическим, чем с регулярным процессом. Далее будут представлены расчеты старшего показателя Ляпунова.

### Расчет старшего показателя Ляпунова

До настоящего времени, как следует из работы [10], лучшей программой по расчету старшего показателя Ляпунова, доступной любому исследователю, является программа [20], согласно которой, если для динамической системы в  $n$ -мерном фазовом пространстве проследить временную эволюцию бесконечно малой сферы начальных условий, то из-за деформации потока эта сфера превратится в  $n$ -мерный эллипсоид. Тогда  $i$ -й показатель<sup>1</sup> Ляпунова  $\lambda_i$  определяется через длину главной эллипсоидальной оси  $\rho_i(t)$ :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{\rho_i(t)}{\rho_i(0)}, \quad (4)$$

где  $\lambda_i$  упорядочены по убыванию, от наибольшего до наименьшего значения (отметим, что показатели Ляпунова, как правило, определяются через натуральный логарифм). При этом ориентация осей также меняет свое направление. Длина первой оси меняется как  $2^{\lambda_1 t}$ ; площадь, определяемая первыми двумя осями, меняется как  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ ; объем, определяемый первыми тремя осями, меняется как  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$  и т. д. Знак показателей Ляпунова качественно определяет картину динамики системы. Положительность старшего показателя Ляпунова указывает на хаос, нулевое значение соответствует многопериодическому или периодическому движению, отрицательные значения этого показателя соответствуют предельной устойчивой точке. Алгоритм вычисления старшего показателя Ляпунова для системы дифференциальных уравнений хорошо известен ([5], [16]). Однако в рассматриваемом случае мы имеем дело

с дискретными изменениями единственной наблюдаемой переменной. Поэтому можно воспользоваться реконструкцией фазового пространства с помощью техники погружения Такенса [18]. Тогда по теореме Такенса динамика реконструированной системы будет обладать тем же спектром показателей Ляпунова, что и исходная система. Однако, исследовав динамику близлежащей точки к данной, можно предположить, что расстояние между двумя точками определяется линейной динамической системой. Время между соответствующими двумя точками должно быть больше характерного периода данной хаотической системы, иначе точки могут совпасть на одной траектории, и в результате получим  $\lambda_1 = 0$ . Поскольку в случае хаотического поведения расстояние между двумя точками в процессе их эволюции быстро растет, периодически приходится заменять точку с «соседней траектории» точкой, более близкой к исходной траектории, с сохранением направления на точку с «соседней траектории». При этом используется процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Из-за шумов и конечного числа точек в реконструированном фазовом пространстве точно такой точки не найти. Поэтому с учетом погрешностей точку выбирают настолько близко по расстоянию и телесному углу, насколько это возможно.

Итак, точка на аттракторе задается вектором  $\{x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + [m - 1]\tau)\}$  где  $\tau$  — время запаздывания. Вначале выбирается самая ближайшая точка (в смысле евклидовой нормы) к точке  $\{x(t_0), x(t_0 + \tau), \dots, x(t_0 + [m - 1]\tau)\}$  и расстояние между точками обозначаем  $L(t_0)$ . В последующий момент времени  $t_1$  расстояние между некоторыми двумя точками на рассматриваемой и «соседней» орбитах —  $L'(t_1)$ . Если время эволюции  $t_1 - t_0$  слишком большое, то точки на первоначально соседних траекториях в это время уже не будут таковыми. (Это обычно приводит к занижению старшего показателя Ляпунова.) Теперь ищем точку из всего набора данных в  $m$ -мерном пространстве, которая наибо-

<sup>1</sup> Здесь и далее авторы используют переменную  $i$  в качестве индекса (прим. ред.).

лее близко отстоит от точки на исходной траектории и минимально отделена от этой точки по углу. Если такой точки нет, то оставляют исходную точку на соседней траектории. Оценку старшего показателя Ляпунова проводят по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})}, \quad (5)$$

где  $M$  — суммарное число замен точек;  $\Delta = t_{k+1} - t_k$  — временной шаг между заменами.

Обратимся к определению параметров программы [19], написанной на Фортране 77: NPT — длина ряда; DIM — размерность вектора одномерного временного ряда в реконструированном пространстве; TAU — время при реконструкции; DT — время между членами ряда; SCALMX — масштаб длины, который считается очень большим и на котором локальная структура аттрактора не рассматривается; SCALMN — масштаб, на котором могут появиться шумы; EVOLVE — время между заменами; ANGLMX — максимально большая угловая ошибка (рекомендовано 0,2–0,3 радиан).

Нами был проведен компьютерный анализ обменных ежедневных курсов доллара к рублю и евро к рублю согласно Центробанку России с января по июнь 2007 г. включительно. Значения других параметров для программы Вольфа: EVOLVE = 10, SCALMX = 100, SCALMN = 0,1, DT = TAU = 1 DIM = 3. (Ранее одним из авторов данной статьи было установлено [1], что корреляционная размерность  $d_c \approx 2,1$  для обоих рассматриваемых временных рядов, поэтому в качестве размерности погружения было выбрано ближайшее целое число).

Проведенные расчеты дали положительные значения старших показателей Ляпунова, что указывает на хаотичность курсов основных валют.

### Расчет корреляционной размерности

Для оптимальной размерности погружения  $d$ , как правило, определяют корреляци-

онную размерность  $d_{cor}$  следующим образом [6]. Вводят в рассмотрение корреляционный интеграл:

$$C(N, e) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N \theta(e - |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|), \quad (6)$$

где  $\theta(x) = 1$  для  $x > 0$ ,  $\theta(x) = 0$  для  $x \leq 0$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  получаем  $C(N, e) \rightarrow C(e)$ . Тогда, по определению,  $d_{cor} = \lim_{e \rightarrow 0} \ln C(e) / \ln(e)$ . Результат расчета корреляционного интеграла представлен на рис. 3 и 4.

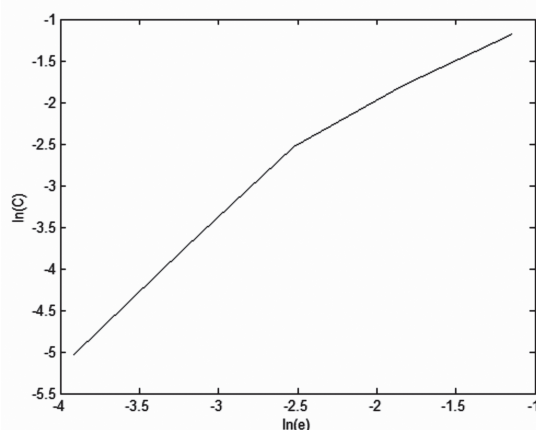


Рис. 3. Корреляционный интеграл для временного ряда курса доллара к рублю ( $d = 20$ )

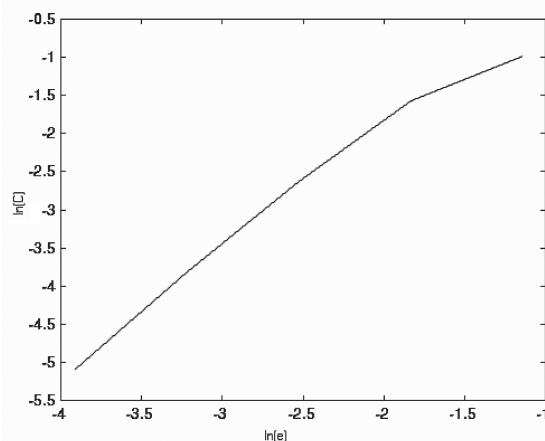


Рис. 4. Корреляционный интеграл для временного ряда курса евро к рублю ( $d = 20$ )

На рисунках для обоих временных рядов приближенное значение корреляционной

размерности  $d_{cor} \approx 2,1$ . Равенство указывает на наличие функциональной зависимости между обоими курсами [7], а также определяет минимальную размерность пространства вложения  $n = 3$  (наибольшее целое число, превышающее  $d_{cor}$ ).

### Сингулярное разложение траекторной матрицы

В настоящей статье используется так называемый SVD-тест на детерминизм [13], позволяющий различить детерминированный и стохастический хаос. Вся доступная информация об этом процессе, согласно [13], содержится в траекторной матрице **A** размерностью  $(N - d + 1) \times d$ , элементы этой матрицы равны:  $a_{ij} = v((i + j - 1)\Delta)$ . Далее используется SVD-разложение [13] матрицы **A** (разложение на сингулярные числа матрицы):  $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T$ , где **V** — ортогональная матрица размерностью  $(N - d + 1) \times d$ ; **U** — ортогональная матрица размерностью  $d \times d$ ; **S** — диагональная  $d \times d$  матрица  $S_{ij} = s(i)\delta_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ );  $s(i)$  — сингулярные (положительные) числа матрицы, упорядоченные по убыванию. В методе [13] размерность погружения  $d$  предполагается достаточно большая (автором выбрано  $d = 20$ ). Соглас-

но численным экспериментам [9], спектр сингулярных чисел ( $s$ ) практически не зависит от  $i$  для однородного белого шума и гауссова белого шума, имеются постепенный спад для периодического и многопериодического процессов, быстрый спад для систем с детерминированным хаосом.

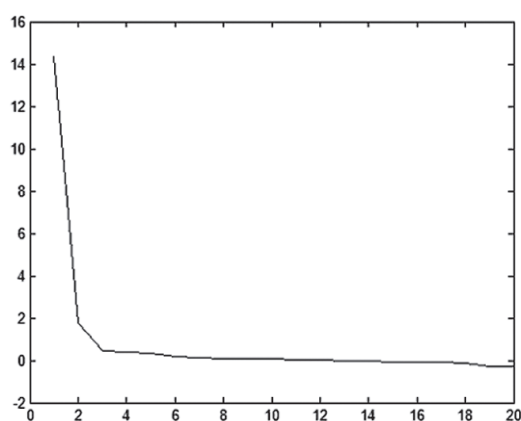
Приведем результаты.

На рис. 5 видно, что сингулярные числа траекторной матрицы быстро уменьшаются, что, согласно работе [13], соответствует явлению детерминированного хаоса. Аналогичная спектральная картина выявлена авторами данной статьи и для курса евро к рублю (рис. 6).

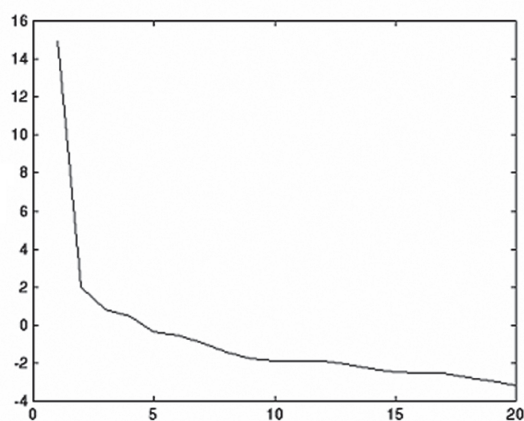
Это так же соответствует детерминированному хаосу. Расчеты проводились в системе MATLAB 6.

Обнаруженный детерминированный хаос в поведении курсов доллара к рублю и евро к рублю указывает на возможность прогноза этих курсов лишь на несколько дней вперед.

На основании проведенного исследования авторами данной статьи выявлена ограниченная предсказуемость курсов валют (на примере Центробанка России) доллара к рублю и евро к рублю на рассмотренном временном промежутке. Ранее похожие результаты были



**Рис. 5.** Зависимость натурального логарифма квадрата сингулярных чисел от номера числа для курса отношения доллара к рублю



**Рис. 6.** Зависимость натурального логарифма квадрата сингулярных чисел от номера числа для курса обмена евро к рублю



получены и для курсов основных валют в других развитых странах. Это указывает на близость экономических процессов как в России, так и в странах Европы, США и Канады. Для получения более достоверных выводов о динамике курсов валют руководителям бирж необходимо предоставлять данные не через сутки, а хотя бы каждый час, что уже практикуется за рубежом. Такие данные создадут более надежные методы моделирования динамики валют для задач прогноза, что имеет исключительно важное значение как для отдельных граждан, так и для страны в целом. Результаты проведенного исследования в совокупности с результатами, изложенными в работе [1], указывают на преобладание в рассмотренных временных рядах детерминированного хаоса. Это означает, что краткосрочный прогноз курсов основных валют возможен. Для этого можно привлекать различные детерминированные подходы.

**От редакции.** Можно использовать адаптивные модели, дающие более надежные результаты, чем сложные эконометрические системы уравнений. При существенной перестройке некоторой экономической структуры эконометрическая модель с постоянными параметрами будет экстраполировать существенно устаревшие зависимости.

### Список литературы

1. Балонишнина В. А. Методы теории хаоса в анализе обменных курсов валют по Центробанку России // Вестник Инжэкона. Серия: экономика. 2009. № 3 (30). С. 251–252.
2. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. СПб: Питер, 2001.
3. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды. М.: КомКнига, 2006.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
5. Bennetin *et al.* Lyapunov Characteristic Exponents in Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems. A method computing All of Them // *Mecanica* 1980, vol. 15. P. 9.
6. Brock W. A., Dechert W. D. and Scheinkmann J. A test for independence, based on correlation dimension. SSRI Working Paper № 8702. University of Wisconsin, 1987.
7. Brock W. A. Distinguishing random and deterministic systems // *Journal of Economic Theory*. 1986, vol. 40. P. 168–195.
8. Brock W. A. Nonlinearity and complex dynamics in economics and finance // *Evolving Complex Systems*. Anderson P. W., Arrow K. and Pines A. eds. Berlin: Springer, 1989. P. 77–97.
9. Brock W. A. and Sayers C. L. Is the business cycle characterised by deterministic chaos // *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 22. P. 71–90.
10. Das A., Das P. Chaotic analysis of the foreign exchange rates // *Applied Mathematics and Computations*. 2007. № 1. P. 388–396.
11. Frisch R. Propagation problems and impulse problems in dynamical economics // *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*. London: Allen and Unwin, 1933. P. 171–205.
12. Hicks J. R. A contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford: Oxford University Press, 1956.
13. Lih J.-S., Ko J.-Y., Chern J.-L., and Jiang I.-M. Determinism test and noise estimate for a complex time series // *Europhysics letters*, 1997, vol. 40. № 1. P. 7–12.
14. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. // *Journal of Atmospheric Science*. 1963, vol. 20. P. 90–104.
15. Lorenz H.-W. Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. N.-Y., Springer-Verlag, 1989.
16. Medio A. Chaotic Dynamics theory and Application to Economics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. — 344 p.
17. Shimada I, Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical system // *Progress of Theoretical Physics*. 1979, vol. 61. P. 1605.
18. Slutsky E. The summation of random causes as the source of cyclical processes // *Econometrica*, 1925, vol. 56. P. 105–146.
19. Takens F. Detecting Strange Attractors in Turbulence // *Lecture Notes in Mathematics*. 1981, vol. 898. P. 366.
20. Wolf A *et al.* Determining Lyapunov exponent from a time series // *Physica D: Nonlinear phenomena*, 1985, vol. 16. P. 285–317.
21. Yule G. U. On the method of investigating periodicities in disturbed series // *Philosophical Transaction*, 1927, vol. 226A. P. 267–298.