

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

DOI 10.17223/19988621/49/1

Я.В. Борисова, И.А. Колесников, С.А. Копанев**О МАЛЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ**

Одним из основных методов решения экстремальных задач является вариационный метод, главный инструмент которого есть вариационные формулы. Некоторые вариационные формулы были получены с помощью семейства отображений из единичного круга на области, лежащие в единичном круге. Предложен достаточно общий подход получения так называемых малых вариаций. Получен ряд новых малых вариаций. Также на простом примере проиллюстрирован метод П.П. Куфарева нахождения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

Ключевые слова: голоморфное однолистное отображение, вариационная формула, параметры в интеграле Кристоффеля – Шварца, метод Куфарева.

Пусть S есть множество всех голоморфных однолистных в круге $E = E_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ отображений $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Какова бы ни была односвязная область $D \subset \mathbb{C}$, $0 \in D$, с конформным радиусом относительно $w = 0$ равным единице, в классе S существует единственное отображение f такое, что $f(E) = D$.

Одним из основных методов решения экстремальных задач в классе S является метод внутренних вариаций [1, 2]. В свою очередь, понятие вариационной формулы является базовым инструментом метода внутренних вариаций.

Отображение $f^* : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f^*(z, \varepsilon)$ принято называть вариационной формулой в классе S для отображения f , $f \in S$, если оно удовлетворяет условиям:

1. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ сужение $f^*|_{E \times \{\varepsilon\}} \in S$ (для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ отображение $f^*(z, \varepsilon)$ как отображение от z принадлежит классу S);
2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f^*(z, \varepsilon) = f(z)$ равномерно внутри E_z ;
3. Существует правосторонняя производная по ε в точке $\varepsilon = 0$, равномерная относительно z внутри E_z .

Задание отображения $f^* : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f^*(z, \varepsilon)$ равносильно заданию семейства отображений $f_\varepsilon : E \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f_\varepsilon(z) = f^*(z, \varepsilon)$ от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

При работе с вариационной формулой ее, как правило, раскладывают по формуле Тейлора по параметру ε в полукрестности точки $\varepsilon = 0$ с нужной степенью точности.

Классическая теорема Г.М. Голузина [1], обобщающая результат Шиффера, позволяет получать вариационные формулы достаточно общего вида (называемые формулами типа Голузина – Шиффера). П.П. Куфарев [3] предложил другой подход к получению таких вариационных формул. Многие математики занимались и занимаются совершенствованием метода внутренних вариаций и поиском приемов получения новых вариационных формул.

В данной работе предлагается достаточно общий подход к получению так называемых малых вариаций с помощью вспомогательного семейства голоморфных однолистных отображений из круга в круг.

Теорема 1. Пусть $g : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ сужение $g|_{E \times \{\varepsilon\}}$ есть голоморфное однолистное отображение;
- 2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$ равномерно внутри E_z ;
- 3) $g(z, \varepsilon)$ и $g'_z(z, \varepsilon)$ дифференцируемы по ε в нуле справа равномерно внутри E_z .

Тогда в классе S для отображения $f \in S$ имеют место вариационные формулы

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)g'_\varepsilon(z, 0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0, 0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (1)$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z ;

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (2)$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z ;

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P_3(z) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (3)$$

где

$$P_3(z) = f'(z)(g'_\varepsilon(z, 0) + z^2 \bar{u} - u + itz) - f(z)(f''(0)(g'_\varepsilon(0, 0) - u) + g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it) - g'_\varepsilon(0, 0) + u,$$

$\hat{\varepsilon} = \min\left(\varepsilon_0, \frac{1}{|u|}\right)$, u, t – константы, $u \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, и $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z ;

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0) + itz) - f(z)(g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (4)$$

где t – константа, $t \in \mathbb{R}$, и $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ равномерно внутри E_z .

Доказательство. Из условия $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$ равномерно внутри E_z по теореме Вейерштрасса следует, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g'_z(z, \varepsilon) = 1$ равномерно внутри E_z . Отсюда следует равенство $g'_z(0, 0) = 1$.

Пусть $g(z, \varepsilon) = z + \varepsilon g'_\varepsilon(z, 0) + o(z, \varepsilon)$. Тогда $g'_z(z, \varepsilon) = 1 + \varepsilon g''_{z\varepsilon}(z, 0) + o(z, \varepsilon)$.

Докажем первую вариационную формулу.

Если $f \in S$, то $\frac{f(g(z, \varepsilon)) - f(g(0, \varepsilon))}{f'(g(0, \varepsilon))g'_z(0, \varepsilon)} = f_1(z, \varepsilon) \in S$.

Записывая $f_1(z, \varepsilon)$ относительно ε по формуле Тейлора, получаем формулу (1).

Докажем вторую вариационную формулу.

Если $f \in S$, то $\frac{1 - |g(0, \varepsilon)|^2}{g'_z(0, \varepsilon)} f\left(\frac{g(z, \varepsilon) - g(0, \varepsilon)}{1 - \overline{g(0, \varepsilon)}g(z, \varepsilon)}\right) = f_2(z, \varepsilon) \in S$.

Формула (2) теперь следует из разложения $f_2(z, \varepsilon)$ относительно ε по формуле Тейлора.

Докажем третью и четвертую вариационные формулы.

Отображение $\eta(z, \varepsilon) = e^{i\varepsilon} \frac{z - i\varepsilon}{1 - z\bar{i}\varepsilon}$ при $|i\varepsilon| < 1$ переводит единичный круг в единичный круг. Заметив, что отображение $\psi(z, \varepsilon) = g(\eta(z, \varepsilon), \varepsilon)$ удовлетворяет условиям теоремы, и используя формулу (1), получаем формулу (3), а используя формулу (2), получаем формулу (4).

При дополнительных условиях на отображение $g: E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon)$ можно получить разложение вариационных формул $f_k(z, \varepsilon)$, $k = 1, 2$, по ε с нужной степенью точности.

Теорема 2. Пусть $g: E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ сужение $g|_{E \times \{\varepsilon\}}$ есть голоморфное однолистное отображение;
- 2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$ равномерно внутри E_z ;
- 3) $g(z, \varepsilon)$ и $g'_z(z, \varepsilon)$ дважды дифференцируемы по ε в нуле справа равномерно внутри E_z .

Тогда в классе S для отображения $f \in S$ имеют место вариационные формулы:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)g'_\varepsilon(z, 0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0, 0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2}Q_1(z) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где

$$Q_1(z) = f''(z)g_\varepsilon'^2(z, 0) + f'(z)(g''_{\varepsilon\varepsilon}(z, 0) - 2f''(0)g'_\varepsilon(z, 0)g'_\varepsilon(0, 0) - 2g'_\varepsilon(z, 0)g''_{z\varepsilon}(0, 0)) - \\ - f(z)(f'''(0)g_\varepsilon'^2(0, 0) - 2f''(0)g_\varepsilon'^2(0, 0) + f''(0)g''_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0) - 2f''(0)g''_{z\varepsilon}(0, 0)g'_\varepsilon(0, 0) + \\ + g'''_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0) - 2g''_{z\varepsilon}(0, 0)) + f''(0)g_\varepsilon'^2(0, 0) + g''_{z\varepsilon}(0, 0)g'_\varepsilon(0, 0) - g''_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0)$$

и $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} = 0$ равномерно внутри E_z ;

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) \left(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0) \right) - f(z) g''_{z\varepsilon}(0,0) \right) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} Q_2(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где

$$Q_2(z) = f''(z) \left(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + g'_\varepsilon(z,0) - g'_\varepsilon(0,0) \right)^2 + \\ + f'(z) \left(2z^3 \overline{g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)} + z^2 \overline{g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0)} - 2z^2 \overline{g''_{z\varepsilon}(0,0)} \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + 4z g'_\varepsilon(z,0) \overline{g'_\varepsilon(0,0)} - \right. \\ \left. - 2z g'_\varepsilon(0,0) \overline{g'_\varepsilon(0,0)} + 2g''_{z\varepsilon}(0,0) g'_\varepsilon(0,0) - 2g''_{z\varepsilon}(0,0) g'_\varepsilon(z,0) + g''_{\varepsilon\varepsilon}(z,0) - g''_{\varepsilon\varepsilon}(0,0) \right) + \\ + f(z) \left(2g''_{z\varepsilon}{}^2(0,0) - 2g'_\varepsilon(0,0) \overline{g'_\varepsilon(0,0)} - g'''_{z\varepsilon\varepsilon}(0,0) \right)$$

и $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} = 0$ равномерно внутри E_z .

Заметим, если отображение $g : E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon)$ удовлетворяет условию $g(0, \varepsilon) = 0$, то $f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon)$.

Выбирая отображение $w = g(z, \varepsilon)$ в конкретном виде, получим малые вариации, как известные, так и новые.

1. Пусть $g : E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$, $g(z, \varepsilon) = \varepsilon e^{i\beta} + (1 - \varepsilon) e^{i\varepsilon} z$.

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) \left(e^{i\beta} - (1 - i)z \right) - f(z) f''(0) e^{i\beta} + f(z) (1 - i) - e^{i\beta} \right) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_1(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где

$$Q_1(z) = f''(z) \left(e^{i\beta} - z(1 - i) \right)^2 + f'(z) \left(-2f''(0) e^{i\beta} \left(e^{i\beta} - z(1 - i) \right) + 2 \left(e^{i\beta} - z(1 - i) \right) - z(1 - 2i) \right) - \\ - f(z) \left(f'''(0) e^{2i\beta} - 2f''^2(0) e^{2i\beta} + 2f''(0) e^{i\beta} (1 - i) - 1 + 2i \right) + f''(0) e^{2i\beta} - (1 - i) e^{i\beta};$$

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(z f'(z) \left(e^{-i\beta} z - (1 - i) \right) + f(z) (1 - i) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_2(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где

$$Q_2(z) = z^2 f''(z) \left(z e^{-i\beta} - (1 - i) \right)^2 + \\ + f'(z) \left(2z^3 e^{-2i\beta} + z^2 (1 - i) \left(2e^{i\beta} - 4e^{-i\beta} \right) - z(1 + 2i) \right) - f(z) (1 - 2i);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) \left(z^2 \bar{u} - z + z(1 + t)i + e^{i\beta} - u \right) - \right. \\ \left. - f(z) \left(f''(0) \left(e^{i\beta} - u \right) - 1 + (1 + t)i \right) - e^{i\beta} + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) \left(z^2 e^{i\beta} - z + z(1 + t)i \right) + f(z) (1 - (1 + t)i) \right) + o(z, \varepsilon), \\ \varepsilon \in [0, 1).$$

Отметим частные случаи этой формулы.

1а. Пусть $g : E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$, $g(z, \varepsilon) = \varepsilon e^{i\beta} + (1 - \varepsilon) z$.

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (e^{i\beta} - z) - f(z) f''(0) e^{i\beta} + f(z) - e^{i\beta} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_1(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где
$$Q_1(z) = f''(z) (e^{i\beta} - z)^2 + f'(z) (-2f''(0) e^{i\beta} (e^{i\beta} - z) + 2(e^{i\beta} - z)) - f(z) (f'''(0) e^{2i\beta} - 2f''^2(0) e^{2i\beta} + 2f''(0) e^{i\beta} - 2) + f''(0) e^{2i\beta} - e^{i\beta};$$

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (ze^{-i\beta} - 1) + f(z) \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q_2(z) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где

$$Q_2(z) = z^2 f''(z) (ze^{-i\beta} - 1)^2 + f'(z) (2z^3 e^{-2i\beta} + z^2 (2e^{i\beta} - 4e^{-i\beta}) + 2e^{i\beta});$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (z^2 \bar{u} - z + itz + e^{i\beta} - z) - f(z) (f''(0) (e^{i\beta} - u) - 1 + it) - e^{i\beta} + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (z^2 e^{-i\beta} - z + it) + f(z) (1 - it) \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1).$$

16. Пусть $g: E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon) = (1 - \varepsilon)e^{i\varepsilon} z$.

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(1 - i)(f(z) - zf'(z)) + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{1}{2} - i \right) (f(z) - zf'(z)) - iz^2 f''(z) \right) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (z^2 \bar{u} - z + (1 + t)iz - u) + f(z) (uf''(0) + 1 - (1 + t)i) + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) - \varepsilon(1 - (1 + t)i)(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1).$$

1в. Пусть $g: E_z \times [0, 1) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon) = (1 - \varepsilon)z$. Тогда вариационные формулы примут вид:

$$f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f(z) - zf'(z)) + \varepsilon^2 \left(f(z) - zf'(z) + \frac{1}{2} z^2 f''(z) \right) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (z^2 u - z + itz - u) + f(z) (uf''(0) + 1 - it) + u \right) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) - \varepsilon(1 - it)(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon).$$

1г. Пусть $g : E_z \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon) = e^{i\varepsilon} z$. Тогда вариационные формулы примут вид:

$$f_1(z, \varepsilon) = f_2(z, \varepsilon) = f(z) + i\varepsilon(zf'(z) - f(z)) - \frac{\varepsilon^2}{2}(z^2 f''(z) - zf'(z) + f(z)) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0);$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \bar{u} + zi(t+1) - u) + f(z)(uf''(0) - i(t+1)) + u) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0);$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon i(t+1)(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

2. Пусть $g : E_z \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$,

$$w = g(z, \varepsilon) = \frac{z - \varepsilon e^{i\beta}}{1 - \varepsilon e^{-i\beta} z} = z + \varepsilon(z^2 e^{-i\beta} - e^{i\beta}) + \varepsilon^2(z^3 e^{-2i\beta} - z) + \dots, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Это отображение удовлетворяет условиям теорем 1 и 2.

Следовательно, в классе S имеют место вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(e^{-i\beta} z^2 - e^{i\beta}) + f(z)f''(0)e^{i\beta} + e^{i\beta}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q_1(z) + o(z, \varepsilon^2),$$

$$\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

где

$$Q_1(z) = f''(z)(e^{i\beta} - e^{-i\beta} z^2)^2 + 2f'(z)(z - e^{-2i\beta} z^3 - f''(0)(e^{2i\beta} - z^2)) - f(z)(f'''(0)e^{2i\beta} - 2f''^2(0)e^{2i\beta} + 2) + f''(0)e^{i\beta};$$

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(\bar{v}z^2 + itz - v) + f(z)(vf''(0) - it) + v) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \text{ где } v = u + e^{i\beta};$$

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon i(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

3. Пусть $g : E \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E$, $w = g(z, \varepsilon) = e^{i\beta} \frac{\ln(e^{i\varepsilon} - e^{-i\beta} z) - \ln(1 - e^{-i\beta} z) - i\varepsilon}{\ln(e^{i\varepsilon} - e^{-i\beta} z) - \ln(1 - e^{-i\beta} z)}$, где

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и однозначная ветвь логарифма выбрана условием $\ln 1 = 0$.

Это голоморфное и однолистное отображение из круга в круг $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Образом E относительно этого отображения есть круг $E = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ с выбранным кругом $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - (1-r)e^{i\beta}| \leq r\}$, где $r = \frac{2\varepsilon}{\pi + 2\varepsilon}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Рассматриваемое отображение имеет следующее разложение по ε :

$$g(z, \varepsilon) = z - \frac{i}{2}z\varepsilon + \frac{z(e^{-i\beta}z - 2)}{12(1 - e^{-i\beta}z)}\varepsilon^2 + o(z, \varepsilon^2), \quad g'_z(0, \varepsilon) = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^2 + o(z, \varepsilon^2).$$

Теперь по теоремам 1 и 2 получаем в классе S вариационные формулы $\forall f \in S$ следующего вида:

$$\begin{aligned}
f_1(z, \varepsilon) &= f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \frac{i}{2} (f(z) - zf'(z)) + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(-\frac{z^2}{4} f''(z) + \frac{z(1-2e^{-i\beta}z)}{6(1-e^{-i\beta}z)} f'(z) - \frac{1}{6} f(z) \right) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0); \\
f_3(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (z^2 \bar{u} - zi(1-t) - u) + f(z) (uf''(0) + i(1-t)) + u \right) + \\
&+ o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0); \\
f_4(z, \varepsilon) &= f(z) - \varepsilon i(1-t) (f'(z)z - f(z)) + o(z, \varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).
\end{aligned}$$

4. Этот пункт начнем с нахождения, используя метод П.П. Куфарева [3] определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца, отображения $w = w(\chi, l)$ из верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{\chi \in \mathbb{C} : \text{Im } \chi > 0\}$ на верхнюю полуплоскость с прямолинейным разрезом длины l , выходящим из точки ноль под углом $(1-\alpha)\pi$, к положительной части вещественной оси. Пусть $w(\infty) = \infty$. Выбрав стандартную параметризацию разреза для отображения из полуплоскости, будем иметь семейство отображений $w = w(\chi, \tau)$, удовлетворяющее уравнению Левнера для полуплоскости

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{\chi - \lambda(\tau)} \frac{\partial w}{\partial \chi} = 0, \quad \tau \in [0, T],$$

с начальным условием $w(\chi, 0) = \chi$, где $\lambda(\tau)$ – прообраз конца разреза.

Обозначим через $a(\tau)$, $b(\tau)$ прообразы вершин с углами $\alpha\pi$, $(1-\alpha)\pi$ соответственно, $a(\tau) < \lambda(\tau) < b(\tau)$, при $0 < \tau \leq T$. Согласно теореме Кристоффеля – Шварца, отображение $w = w(\chi, \tau)$ можно представить в виде

$$w(\chi, \tau) = c(\tau) \int_{a(\tau)}^{\chi} (z - \lambda(\tau))(z - a(\tau))^{\alpha-1} (z - b(\tau))^{-\alpha} dz.$$

В книге [4, гл.6, §3] записан результат П.П. Куфарева для отображений из верхней полуплоскости на многоугольник. Тогда в нашем случае параметры $a(\tau) = a(x^2) = a_1(x)$, $b(\tau) = b(x^2) = b_1(x)$, $\lambda(\tau) = \lambda(x^2) = \lambda_1(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{da_1(x)}{dx} = \frac{2x}{a_1(x) - \lambda_1(x)}, \\ \frac{db_1(x)}{dx} = \frac{2x}{b_1(x) - \lambda_1(x)}, \\ \frac{d\lambda_1(x)}{dx} = (1-\alpha) \frac{da_1(x)}{dx} + \alpha \frac{db_1(x)}{dx}, \end{cases}$$

с начальным условием $a_1(0) = b_1(0) = \lambda_1(0) = 0$.

Решая систему методом рядов, находим

$$a_1(x) = -x\sqrt{2\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad b_1(x) = x\sqrt{2\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad \lambda_1(x) = x\sqrt{2}\frac{2\alpha-1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}.$$

Перейдя в подынтегральном выражении к параметру x , подставив найденные параметры a_1, b_1, λ_1 и выполнив замену $z = \zeta\sqrt{2\frac{\alpha}{1-\alpha}} - x\sqrt{2\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, будем иметь

$$w(\zeta, x) = c(x) \int_0^{\zeta} (z-x) z^{\alpha-1} \left(z - \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha} dz.$$

Из условия $w(\infty) = \infty$ следует, что $c(x) = 1$. Проинтегрировав, получим

$$w(\zeta, x) = \zeta^{\alpha} \left(\zeta - \frac{x}{\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Из условия $w(x, x) = l e^{i(1-\alpha)\pi}$ имеем $x = l \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$, окончательно получим отображение

$$w(\zeta, l) = \zeta^{\alpha} \left(\zeta - \frac{l}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

из полуплоскости на полуплоскость с разрезом длины l ; прообразами вершин $0, l e^{i\pi(1-\alpha)}$, 0 при этом отображении являются соответственно точки $0, l \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}, \frac{l}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$.

Пусть теперь $g: E_z \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow E_{\xi}$, $\xi = g(z, \varepsilon)$ есть голоморфное и однолистное отображение из единичного круга E_z на единичный круг E_{ξ} с разрезом длины ε , идущим из точки 1 по дуге окружности радиуса r , составляющей угол $(1-\alpha)\pi$, $0 < \alpha < 1$, с верхней половинкой единичной окружности. Пусть отображение g удовлетворяет условию $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(z, \varepsilon) = z$.

Отображение g можно представить композицией $g(z, \varepsilon) = \xi(w(\zeta(z, \varepsilon)))$, где

$$\xi(w) = e^{i\theta} \frac{w - s(\varepsilon) e^{-\frac{i\theta}{2}}}{w - s(\varepsilon) e^{\frac{i\theta}{2}}}, \quad w(\zeta) = \zeta^{\alpha} \left(\zeta - \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\varepsilon}{2r}\right)^{1-\alpha}, \quad \zeta(z) = s(0) e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{z-1}{z - e^{i\theta}},$$

$$\text{а } s(\varepsilon) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \frac{\sin\left(\alpha\pi - \frac{\varepsilon}{2\pi}\right) - r \sin \frac{\varepsilon}{2r}}{\sqrt{1 + 2r \cos(\alpha\pi) + r^2}}, \quad e^{i\theta} = e^{-i2\alpha\pi} \frac{r + e^{i\alpha\pi}}{r + e^{-i\alpha\pi}}.$$

Отображение g раскладывается по ε_1 в ряд $g(z, \varepsilon_1) = z + \varepsilon_1 (z - e^{i\theta})^2 + o(\varepsilon_1)$, где ε_1 пропорционально ε . Переобозначив ε_1 через ε , по теореме 1 получаем вариационную формулу

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f'(z) (z - e^{i\theta})^2 - f(z) (f''(0) e^{i2\theta} - 2e^{i\theta}) - e^{i2\theta} \right) + o(\varepsilon, z), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где $e^{i\theta} = e^{-2i\alpha\pi} \frac{r + e^{i\alpha\pi}}{r + e^{-i\alpha\pi}}$ – точка на единичной окружности, через которую проходит продолжение разреза.

5. Рассуждения в этом пункте повторяют доказательства теорем 1 и 2, так как формально их применить нельзя.

Пусть $g: E_z \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon)$ есть голоморфное однолиственное отображение из круга E_z на круг E_ζ с выброшенным отрезком

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : \arg \zeta = \beta, 1 - \varepsilon \leq |\zeta| \leq 1\}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1).$$

Это отображение неявно задается уравнением

$$4(1 - \varepsilon)z(e^{-i\beta}g^2(z, \varepsilon) + e^{i\beta}) = (4(z^2 + 1) - 4(z^2 + 1)\varepsilon + (z + 1)^2\varepsilon^2)g(z, \varepsilon),$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} g(z, \varepsilon) = e^{i\beta}z$ равномерно внутри E_z и имеет следующее разложение по ε :

$$g(z, \varepsilon) = e^{i\beta}z + \varepsilon^2 e^{i\beta} \frac{z}{4} \frac{z+1}{z-1} + \varepsilon^3 e^{i\beta} \frac{z}{4} \frac{z+1}{z-1} + o(z, \varepsilon^3),$$

$$g'_z(0, \varepsilon) = e^{i\beta} - \frac{1}{4} e^{i\beta} \varepsilon^2 - \frac{1}{4} e^{i\beta} \varepsilon^3 + o(0, \varepsilon^3).$$

Раскладывая $\frac{f(g(z, \varepsilon))}{g'_z(0, \varepsilon)}$, где $f \in S$, по степеням ε с точностью до ε^3 , получим

$$e^{i\beta} f(z, \varepsilon) = e^{i\beta} \frac{f(g(z, \varepsilon))}{g'_z(0, \varepsilon)} = f(e^{i\beta}z) + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(f'(e^{i\beta}z) e^{i\beta} z \frac{z+1}{z-1} + f(e^{i\beta}z) \right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^3}{4} \left(f'(e^{i\beta}z) e^{i\beta} z \frac{z+1}{z-1} + f(e^{i\beta}z) \right) + o(z, \varepsilon^3).$$

Переобозначая $e^{i\beta}z$ через z и учитывая, что, если $f(z, \varepsilon) \in S$, то $e^{i\beta} f(e^{-i\beta}z, \varepsilon) = f_1(z, \varepsilon) \in S$, получаем в классе S для отображения f следующую вариационную формулу:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon^2 \frac{1}{4} \left(f(z) + zf'(z) \frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1} \right) +$$

$$+ \varepsilon^3 \frac{1}{4} \left(f(z) + zf'(z) \frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1} \right) + o(z, \varepsilon^3), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0).$$

Малая вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left(f(z) + zf'(z) \frac{e^{-i\beta}z+1}{e^{-i\beta}z-1} \right) + o(z, \varepsilon)$$

известна и может быть получена другим способом, например с помощью семейства голоморфных однолистных отображений из E_z на единичный круг с выброшенной луночкой малой площади, пропорциональной ε .

Приведем для полноты еще две известные малые вариационные формулы.

6. В классе S имеет [1] место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k \frac{f^2(z)}{f(z) - w_k}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0),$$

где $A_k \in \mathbb{C}$, $k \in \overline{1, n}$, для отображения f с условием, что у $f(E)$ есть внешние точки w_k , $k \in \overline{1, n}$.

7. В классе S имеет [5] место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon (2e^{i\beta} - c_2) f^2(z) + \varepsilon^2 (2c_2^2 - c_3 - 4e^{i\beta} + 3e^{2i\beta}) f^3(z) + o(z, \varepsilon^2),$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где $\beta \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{C}$, $|c_2| \leq 2$, $c_3 \in \mathbb{C}$, $|c_3| \leq 3$, для отображения f с условием, что $f(\partial E_z)$ есть жорданова кривая.

Последнюю формулу называют малой вариацией Шиффера в бесконечности. Отметим, что константы c_2 и c_3 , вообще говоря, зависят от отображения f .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геометрическая теория функции комплексного переменного*. 2-е изд. / под ред. В.И. Смирнова. М.: Наука. 1966. 630 с.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. 219 с.
3. *Труды П.П. Куфарова: к 100летию со дня рождения* / под общ. ред. И.А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. 371 с.
4. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
5. *Schiffer M.* On the coefficient problem for univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. No. 1. P. 95–101.

Статья поступила 12.07.2017 г.

Borisova Ya.V., Kolesnikov I.A., Kopanев S.A. (2017) ON SMALL VARIATION FORMULAS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/49/1

One of the main methods for solving extremal problems is the variational method. Variational formulas are the main tool of the variational method. Some variational formulas, the so-called small variational formulas, were obtained by means of a family of mappings from the unit disk onto domains lying in the unit disk. There is a theorem in the paper that gives a rather general approach to obtaining small variational formulas.

Theorem. Let the map $g: E_z \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow E_\zeta$, $\zeta = g(z, \varepsilon)$ satisfy the following conditions:

- 1) $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, the contraction $g|_{E \times \{\varepsilon\}}$ is a holomorphic univalent mapping;
- 2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(z, \varepsilon) = z$, locally uniformly in E_z ;
- 3) there exists a partial right derivative of $g(z, \varepsilon)$ and $g'_z(z, \varepsilon)$ with respect to ε at the origin, locally uniformly in E_z .

Then, in the class S for the mapping $f \in S$, the following variational formulas take place:

$$f_1(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)g'_\varepsilon(z, 0) - f(z)f''(0)g'_\varepsilon(0, 0) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (1)$$

where $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z ;

$$f_2(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0)) - f(z)g''_{z\varepsilon}(0, 0)) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (2)$$

where $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z ;

$$f_3(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P_3(z) + o(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (3)$$

where

$$P_3(z) = f'(z)(g'_\varepsilon(z, 0) + z^2 \bar{u} - u + itz) -$$

$$- f(z)(f''(0)(g'_\varepsilon(0, 0) - u) + g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it) - g'_\varepsilon(0, 0) + u,$$

$\hat{\varepsilon} = \min\left(\varepsilon_0, \frac{1}{|u|}\right)$, u, t are constants, $u \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, and $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z ;

$$f_4(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon(f'(z)(z^2 \overline{g'_\varepsilon(0, 0)} + g'_\varepsilon(z, 0) - g'_\varepsilon(0, 0) + itz) - f(z)(g''_{z\varepsilon}(0, 0) + it)) + o(z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}), \quad (4)$$

where t is a constant, $t \in \mathbb{R}$, and $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{o(z, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ locally uniformly in E_z .

A number of new small variations have been obtained. In addition, the P.P. Kufarev method of finding parameters in the Christoffel–Schwarz integral is illustrated by a simple example.

Keywords: holomorphic univalent mapping, variational formula, parameters in the Christoffel–Schwarz integral, Kufarev method

BORISOVA Yana Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: borisova_yana@list.ru

KOLESNIKOV Ivan Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics,

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

KOPANEV Sergey Anatolievich (Candidate of Physics and Mathematics,

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: copanev_d@mail.ru

REFERENCES

1. Goluzin M.G. (1966) *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of a function of a complex variable]. Moscow: Nauka.
2. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of the geometric theory of analytic functions]. Tomsk, TSU Publ.
3. *Proceedings of P.P. Kufarev: on the 100th anniversary of his birth* (2009). Tomsk: NTL Publ.
4. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
5. Schiffer M. (1968) On the coefficient problem for univalent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 134 (1). pp. 95–101.