УДК 336.764

СРАВНЕНИЕ СТРАТЕГИЙ ХЕДЖИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ОПЦИОННЫХ ПОЗИЦИЙ С УЧЕТОМ ТРАНСАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

© 2010 г.

Д.В. Стаханов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

dimitrium@hotmail.ru

Поступила в редакцию 11.12.2009

Представлено сравнение различных методов хеджирования сложных опционных позиций с учетом трансакционных издержек. Сравниваются стратегии Блэка – Шоулза, Хоггарда – Валлея – Вилмотта, Леланда, толерантности дельты, толерантности актива, хеджирования к фиксированной полосе пропуска и асимптотическая стратегия Валлея – Вилмотта. В качестве сложных опционных позиций рассматриваются: бычий и медвежий спрэды, бычий спрэд из опционов азиатского типа, опционы call lookback.

Ключевые слова: хеджирование, опцион, дельта, трансакционные издержки, стратегия хеджирования.

Существует большое количество работ, посвящённых проблеме оценки опционов и хеджированию с учетом трансакционных издержек. Однако очень немного было сделано для практического сравнения различных методов хеджирования.

Одними из лучших работ, сравнивающих стратегии хеджирования, являются статьи Мартеллини и Приаулет (Martellini and Priaulet) [1] и Мохамеда (Mohamed) [2]. В данных статьях сравниваются наиболее популярные методы хеджирования с учётом трансакционных издержек. В своей статье Мохамед сравнил действия четырех различных стратегий хеджирования в рамках среднего VAR (стоимости под риском - Value-at-Risk): стратегии Блэка – Шоулза (Black and Scholes) и Леланда (Leland), стратегию толерантности дельты и асимптотическую стратегию Валлея – Вильмотта (Whalley and Wilmott) [3]. В результате анализа Мохамед выяснил, что асимптотическая стратегия Валлея – Вильмотта показывает лучшие результаты при хеджировании, а стратегия Леланда занимает второе место по результативности.

Мартеллини и Приаулет сравнили действия пяти различных стратегий хеджирования в рамках средней дисперсии. Три из пяти стратегий в этом исследовании представляли собой варианты стратегии Леланда. Двумя другими стратегиями являлись стратегия толерантности актива и стратегия хеджирования к фиксированной полосе пропуска хеджирования (fixed bandwidth strategy). Эти авторы выяснили, что стратегия хеджирования к фиксированной пропускной полосе демонстрирует лучшие результаты в большинстве случаев, а второе место по результативности занимает стратегия толерантности актива.

Выводы данных авторов в большинстве случаев не применимы на практике, так как они сравнивали различные методы хеджирования на примере коротких европейских call опционов. Однако в практической деятельности почти каждый инвестор сталкивается с проблемой хеджирования сложной опционной позиции. Следовательно, знание оптимальной стратегии хеджирования для сложной опционной позиции имеет большое практическое значение.

В этой статье мы сравниваем шесть стратегий хеджирования: стратегию Блэка – Шоулза, статегию Хоггарда – Валлея – Вилмотта, стратегию хеджирования по методу Леланда, стратегию толерантности дельты, стратегию толерантности актива, стратегию хеджирования к фиксированной полосе пропуска и асимптотическую стратегию Валлея – Вилмотта.

Для того чтобы определить, какие стратегии показывают лучшие результаты, прежде всего определим, какие меры риска и доходности необходимо выбрать для сравнения. В контексте хеджирования опционов самая популярная мера риска – стандартное отклонение ошибки репликации [4; 1; 5]. В качестве меры доходности стратегий будет использоваться средняя ожидаемая ошибка репликации (также известная как ожидаемая прибыль и убыток, P&L стратегии хеджирования).

Таким образом, по заданным критериям мы сравним рассматриваемые стратегии хеджирования и проранжируем их по результативности.

Возьмём, к примеру, дискретную стратегию хеджирования Блэка – Шоулза. Мы устанавливаем значение δt (временной интервал), выполняем моделирование стратегии хеджирования и вычисляем риск и выплаты для этого δt. Затем мы пошагово изменяем параметр δt и охватываем все возможные комбинации риска и выплат. Набор всех возможных комбинаций риска и выплат стратегии хеджирования представляет собой эффективную границу стратегии хеджирования. Точно так же мы выполняем моделирование всех стратегий хеджирования и находим их эффективные границы. Каждая стратегия хеджирования имеет свои эффективные границы, то есть каждая стратегия имеет своё соотношение доходности и риска.

Рациональный хеджер предпочтет ту стратегию, которая минимизирует риск для заданного уровня доходности. Это аналогично современной портфельной теории, где инвестор стремится минимизировать волатильность портфеля (то есть риск) для заданного уровня доходности. Следовательно, та стратегия хеджирования лучше, чем другие, которая для заданного уровня доходности предполагает самый низкий риск. Кроме того, стратегия хеджирования лучше, чем другие, если для заданного уровня риска она предполагает самую высокую доходность. А также стратегия хеджирования может быть лучше других, если для любого уровня доходности она предполагает самый низкий риск.

С технической стороны процесс моделирования выглядит следующим образом:

1. Сначала хеджер сложного опциона получает/платит стоимость, оцененную по формуле Блэка – Шоулза (то же самое для каждой стратегии) и создает портфель мультиплицирования. Движение акции моделируется согласно:

$$S(t + \delta t) = S(t) \exp\left((\mu - 0.5\sigma^2)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\,\varepsilon\right),$$

где $S(t + \delta t)$ – курс акции, δt – временной интервал, σ – волатильность акции, μ – коэффициент сноса, ε – переменная функции нормального распределения со средним 0 и отклонением 1.

Здесь мы используем следующие параметры модели: начальный курс акций S (0) = 100, волатильность акции σ = 25%, коэффициент сноса μ = 10%, безрисковая процентная ставка r = 5%. Для позиции, не зависимой от движения цены базового актива, используем срок истечения опциона T = 1, для позиции, сильно зависимой от движения цены базового актива, используем T = 0.5.

2. В каждый интервал времени δt проверяем, должен ли опцион быть повторно застрахован. Если это так, должен быть выполнен пересмотр портфеля, что приведёт к росту трансакционных издержек.

3. Наконец, по истечению всех этапов мы вычисляем ошибку репликации, то есть стоимость портфеля мультиплицирования минус издержки хеджирования.

Для стратегии Блэка – Шоулза и Хоггарда – Валлея – Вилмотта мы изменяем параметр δt (интервал перехеджирования). Для других стратегий, если позиция не зависит от движения цены базового актива, движение акции состоит из 250 одинаковых временных периодов в течение срока жизни опционной позиции. Для опционной позиции, сильно зависимой от движения цены базового актива, движение акции состоит из 400 одинаковых временных периодов в течение жизни опционной позиции. В стратегии толлерантности дельты, толлерантности актива и стратегии хеджирования к фиксированной полосе пропуска H и h (коэффициенты полосы пропуска хеджирования) принимают значения [0.01; 0.35]. Для асимптотической стратегии Валлея – Вилмотта мы рассматриваем параметр $h \in [0.01; 2.0]$. Условная величина пропорциональных трансакционных издержек составляет λ=1%, данная величина трансакционных издержек использовалась также в работах [4; 2]. Этот уровень не особенно высокий. Для каждой из этих стратегий хеджирования мы создаем ценовой ряд с 200 000 значений, вычисляем среднее значение ошибки репликации и её стандартное отклонение.

При моделировании были использованы опционные позиции с характеристиками, представленными в таблице 1.

Таблица 1

Характеристика опционных позиций, используемых в анализе методов хеджирования с учетом трансакционных издержек

Опционная позиция	Структура опционной позиции
Бычий спрэд	Короткий опцион call со страйком K_1 = 80 Длинный опцион call со страйком K_2 = 120
Медвежий спрэд	Длинный опцион call со страйком K_1 = 80 Короткий опцион call со страйком K_2 = 120
Бычий спрэд опционов азиатского типа	Короткий азиатский опцион call со страйком K_1 = 90 Длинный азиатский опцион call со страйком K_2 = 110
Опцион call lookback	Короткий call опцион lookback с фиксированным страйком K = 100

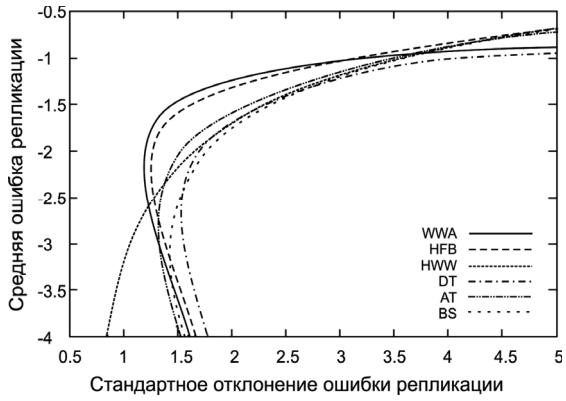


Рис. 1. Эффективные границы для альтернативных стратегий при хеджировании бычьего спрэда

На рис. 1 представлены результаты моделирования результатов альтернативных стратегий при хеджировании бычьего спрэда. Из него видно, что когда непринятие риска хеджера умеренно (оно ни низкое, ни большое), асимптотическая стратегия Валлея – Вилмотта (WWA) показывает лучшие результаты (см. левую верхнюю часть рисунка – середины кривых, представляющих эффективные границы). За ней по результативности следует стратегия хеджирования к фиксированной полосе пропуска (HFB) (это подтверждают результаты, полученные Мартеллини и Приаулетом).

Таким образом, в случае, если толерантность к риску хеджера является средней, ранжирование стратегий выглядит следующим образом:

WWA> HFB> AT> HWW> DT> BS.

Однако при увеличении непринятия риска хеджера полоса пропуска хеджирования в стратегиях WWA, HFB и DT должна быть уменьшена хеджером для снижения риска портфеля хеджирования. Кроме того, увеличение непринятия риска хеджера приводит к тому, что пересмотр портфеля в стратегии AT становится более частым. Легко можно заметить, что все эти стратегии сходятся со временем к стратегии Блэка – Шоулза. Таким образом, при предельном увеличении непринятия риска хеджера количество трансакционных издержек стремится к бесконечности. В этом случае стратегия HWW, которая использует модифицированную волатильность хеджирования, показывает лучшие результаты (см. нижнюю часть рис. 1).

При снижении непринятия риска хеджера (см. верхнюю правую часть рис. 1) некоторые из стратегий показывают схожие результаты, поэтому ранжирование стратегий в этом случае следующее:

HFB≈AT≈HWW≈BS>WWA>DT.

Таким образом, когда толерантность хеджера к риску высокая, стратегии HFB, AT, HWW и BS показывают похожие результаты, лучшие, чем у стратегии WWA и стратегии DT.

На рис. 2 представлено сравнение результатов работы альтернативных стратегий при хеджировании медвежьего спрэда. В отличие от предыдущего ранжирования стратегий в хеджировании медвежьего спрэда относительное преимущество стратегии HFB над стратегией AT намного меньше, и, когда непринятие риска хеджера увеличивается, стратегия AT начинает показывать результаты, лучшие по сравнению с HFB. В хеджировании медвежьего спрэда, когда непринятие риска хеджера умеренно, относительное преимущество WWA стратегии больше, чем при хеджировании бычьего спрэда.

Когда непринятие риска хеджера является или низким или высоким, ранжирование стратегий такое же, как и при бычьем спрэде.

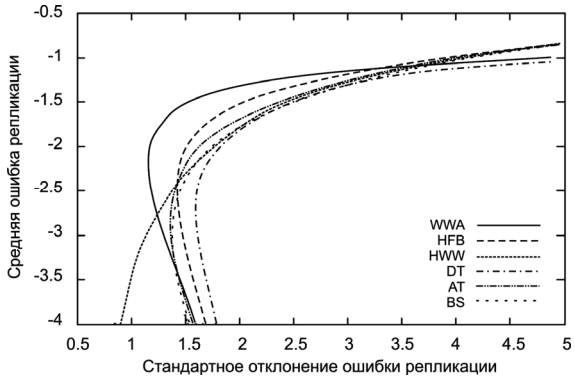


Рис. 2. Эффективные границы для альтернативных стратегий при хеджировании медвежьего спрэда

Теперь мы включаем в сравнение результаты работы стратегии для хеджирования бинарного опциона call со структурой выплат «деньги или ничего». Хеджирование такого опциона, как известно, трудно разрешимая проблема, для которой стандартное дельта-хеджирование Блэка – Шоулза дает плохие результаты [4].

В частности, так как бинарный опцион имеет дискретные выплаты, такой опцион имеет огромную дельту и гамму около окончания срока истечения, что затрудняет его хеджирование.

Рис. 3 представляет результаты моделирования хеджирования бычьего спрэда опционов азиатского типа.

При хеджировании данной сложной опционной позиции, когда непринятие риска хеджера является низким, стратегия HFB сильно опережает все другие стратегии. Полное ранжирова-

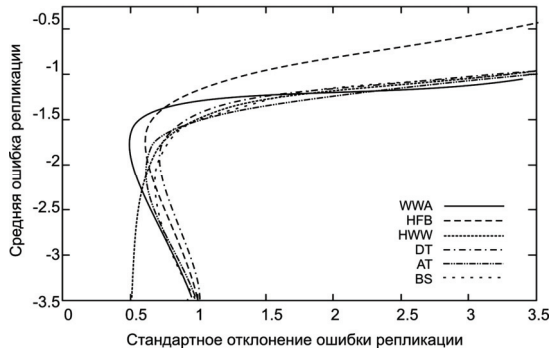


Рис. 3. Эффективные границы для альтернативных стратегий при хеджировании бычьего спрэда опционов азиатского типа

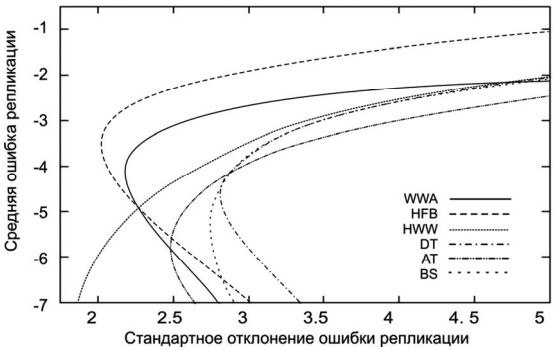


Рис. 4. Эффективные границы для альтернативных стратегий при хеджировании опциона call lookback

ние стратегий хеджирования в этом случае следующее:

HFB>AT≈HWW≈BS≈DT>WWA.

Когда непринятие риска хеджера увеличивается, стратегия HFB постепенно теряет свое преимущество перед другими стратегиями. В то же самое время стратегия WWA занимает уже второе место по результативности после стратегии HFB. В конечном итоге, по мере того как непринятие риска хеджера становится выше среднего, стратегия WWA начинает опережать HFB. Однако, если мы увеличиваем непринятие риска хеджера ещё больше, лучшей стратегией хеджирования становится стратегия HWW.

Рис. 4 представляет результаты моделирования хеджирования короткого call опциона lookback.

Когда непринятие риска хеджера является умеренным или низким, стратегия HFB показывает лучшие результаты. Когда непринятие риска хеджера ни очень высокое, ни очень низкое, полное ранжирование стратегий следующее:

HFB> WWA> HWW> DT> BS>AT

или

HFB> WWA> HWW> AT> BS> DT

в зависимости от уровня непринятия риска хеджера. Отметим, что теперь стратегия AT показывает худшие результаты работы, когда величина непринятия риска хеджера низкая, а стратегия DT показывает худшие результаты работы, когда величина непринятия риска хеджера высокая. Если непринятие риска хеджера низкое, то WWA-стратегия теряет свои позиции и демонстрирует худший результат, чем ранее. Если непринятие риска хеджера очень высокое, стратегия HWW показывает лучшие результаты.

В табл. 2 представлены результаты исследования, проведённого в данной статье.

Подведём итоги анализа стратегий хеджирования. Ранжирование альтернативных стратегий хеджирования в присутствии трансакционных издержек зависит и от состава, и от функции выплат сложной опционной позиции, а также от толерантности хеджера к риску. Ранжирование стратегий хеджирования может быть полностью различным для различных вариантов сложных опционных позиций.

Отметим, что хеджирование с полосой пропуска вокруг дельты Блэка – Шоулза позволяет сократить величину трансакционных издержек и при этом сохранить ошибку хеджирования на некотором предсказанном уровне. Это очевидно, так как повторное хеджирование позиции не является оптимальным, когда цена базового актива изменяется незначительно. Однако, когда мы вводим полосу пропуска, перехеджирование осуществляется только в случае, когда дельта опциона изменяется сильно. Так как в стратегии HFB и DT полоса пропуска хеджирования постоянна, то в случае, когда гамма опциона огромна, фиксированная полоса пропуска хеджирования не позволяет нам уменьшить величину трансакционных издержек. Так как в этом случае хеджер хоть и пересматривает свой портфель значительно реже, но размеры трансакционных издержек все равно постепенно возрастают. Общая сумма трансакционных издержек в результате не уменьшается в сравнении с суммой трансакционных издержек в прямой стратегии BS. При этом наложение условия полосы пропуска хеджирования приводит к большей ошибке хеджирования при том же самом уровне трансакционных издержек.

В стратегии хеджирования на основе полезности полоса пропуска хеджирования зависит, кроме прочих факторов, от абсолютного значения гаммы опционной позиции. Следовательно, чем больше значение гаммы опциона, тем должна браться большая полоса пропуска хед-

Таблица 2

Ранжирование стратегий хеджирования в зависимости от функции выплат опционной позиции и предпочтений риска хеджера

Опционная позиция	Непринятие риска хеджера	Ранжирование стратегий хеджирования
Бычий спрэд	Высокое	HWW>AT>BS>WWA>FB>DT
	Умеренное	WWA>HFB>AT>HWW>DT>BS
	Низкое	HFB≈AT≈HWW≈BS>WWA>DT
Медвежий спрэд	Высокое	HWW>BS>AT>WWA>HFB>DT
	Умеренное	WWA>HFB>AT>HWW≈BS>DT
	Низкое	HFB≈DT≈HWW≈BS>WWA>DT
	Низкое	BS≈AT≈HWW>WWA>HFB>DT
Бычии спрэд опционов азиатского типа	Высокое	HWW>WWA≈HWW>AT>HFB>DT
	Умеренное	WWA>HFB>AT≈DT>HWW≈BS
	Низкое	HFB>DT≈HWW≈BS>AT>WWA
Опцион call lookback	Высокое	HFB>HWW≈BS>WWA≈DT>AT
	Умеренное	HFB>WWA>HWW>DT>BS>AT
	Низкое	HWW>AT>WWA>BS>HFB>DT

жирования в точном соответствии стратегии хеджирования, основанной на функции полезности. Именно поэтому асимптотическая стратегия Валлея и Вилмотта демонстрирует лучшие результаты среди альтернативных стратегий в хеджировании опционной позиции, для которой существует высокая вероятность того, что движение цены базового актива пройдет через области с высокими абсолютными значениями гаммы и при этом толерантность хеджера к риску является средней.

Примечания

Хеджирование – способ страхования риска изменения цены актива через определённый срок с помощью открытия противоположной равноценной позиции.

Опцион call – опцион, покупатель которого приобретает право купить определенное количество базового актива по оговоренной цене по истечении срока опциона или ранее. ***Опцион put*** – опцион, покупатель которого приобретает право продать определенное количество базового актива по оговоренной цене по истечении срока опциона или ранее.

Опцион азиатского типа – опцион, цена исполнения которого определяется средней стоимостью активов на период его действия.

Опцион call lookback – опцион с возвратом, «с оглядкой назад», опцион, который дает его владельцу право приобрести базовый актив по наиболее подходящей ему цене, которая была достигнута в период до исполнения опциона.

Дельта опциона – величина, характеризующая скорость изменения цены опциона относительно цены базового актива.

VAR (Value-at-Risk) – «стоимость под риском» – показатель, оценивающий максимально возможный размер потерь в портфеле компании с заданной степенью доверительности.

Бычий спрэд – покупка опционного контракта на ближайший месяц и продажа опционного контракта на отсроченный месяц с целью извлечения прибыли на разнице в ценах.

Медвежий спрэд – продажа контракта на ближайший месяц и покупка контракта на отсроченный месяц с целью извлечения прибыли на разнице в ценах.

Стратегия Блэка – Шоулза – представляет собой стратегию рехеджирования по базовому активу в неподвижных постоянных интервалах времени.

Стратегия Хоггарда – Валлея – Вилмотта – модифицированная стратегия Леланда с применением измененной волатильности, которая зависит от знака второй производной цены опциона с учётом цены базового актива.

Стратегия хеджирования по методу Леланда – модифицированная стратегия Блэка – Шоулза, которая разрешает репликацию отдельного опциона с конечным объемом трансакционных издержек, независимо от того, насколько маленьким является временной интервал перехеджирования.

Стратегия толерантности дельты – эта стратегия предполагает перехеджирование по дельте опциона, рассчитанной по формуле Блэка – Шоулза, когда коэффициент хеджирования, определяемый как относительное количество базового актива, удерживаемого в портфеле хеджирования, выходит за определённые допустимые границы хеджевой позиции.

Стратегия толерантности актива – эта стратегия предполагает перехеджирование по дельте опциона, рассчитанной по формуле Блэка – Шоулза, когда процент изменения в стоимости базового актива превышает допустимую величину.

Стратегия хеджирования к фиксированной полосе пропуска – перехеджирование следует производить рядом с границей области без трансакционных издержек, как только коэффициент хеджирования выходит из так называемой «области без трансакционных издержек», в пределах которой инвестор не подвержен трансакционным издержкам.

Асимптотическая стратегия Валлея – Вилмотта – хеджирование осуществляется по тому же принципу, что и в стратегии хеджирования с фиксированной полосой пропуска, но в данном случае полоса пропуска хеджирования непостоянна.

Список литературы

1. Martellini L. and Priaulet P. Competing Methods for Option Hedging in the Presence of Transaction Costs // Journal of Derivatives. 2002. **9(3)**. P. 26–38.

2. Mohamed B. Simulations of Transaction Costs and Optimal Rehedging // Applied Mathematical Finance. 1994. **1**. P. 49–63.

3. Whalley A. E. and Wilmott P. An Asymptotic Analysis of an Optimal Hedging Model for Option Pricing with Transaction Costs // Mathematical Finance. 1997. **7(3)**. P. 307–324.

4. Clewlow L. and Hodges S. Optimal Delta-Hedging under Transaction Costs // Journal of Economic Dynamics and Control. 1997. **21**. P. 1353–1376.

5. Zakamouline V.I. Dynamic Hedging of Complex Option Positions with Transaction Costs // Agder University College Faculty of Economics, 2006.

COMPARISON OF HEDGING STRATEGIES FOR COMPLEX OPTION POSITIONS WITH THE ACCOUNT OF TRANSACTION COSTS

D.V. Stakhanov

The author compares the efficiency of hedging strategies for complex option positions with the account of transaction costs. A comparison is drawn between Black – Scholes strategy, Hoggard – Whalley – Wilmott strategy , Leland's strategy, delta tolerance strategy, asset tolerance strategy, the strategy of hedging to the fixed strip of the miss (passing), and asymptotic Whalley – Wilmott strategy. Some complex option positions are also considered: the bull and bear spreads, the bull spread from the options of the Asian type, lookback call options.

Keywords: hedging, option, delta, transaction costs, hedging strategy.