

УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

А. А. Гурченков, И. М. Иванов, А. И. Фесечко

В статье рассмотрен способ декомпозиции по базовым типам движения и взаимодействия в задаче динамики твердого тела с полостью, содержащей жидкость.

При решении задачи управления вращающимися твердыми телами с жидким наполнением (идеальная жидкость) будем использовать выражение для $\vec{\Omega}(t)$ как функции управляющего момента $\vec{M}(t)$, с помощью которого можно изменять состояние динамической системы, переводя ее из одного состояния в другое. В дальнейшем будем рассматривать различные классы задач оптимального управления.

1. Переход от интегрального уравнения к системе дифференциальных уравнений. Рассмотрим выражение для угловой скорости, полученное в [3–4],

$$\vec{\Omega}(t) = \int_0^t \vec{M}(\tau) \left(X e^{p^{(1)}(t-\tau)} + Y e^{p^{(2)}(t-\tau)} \right) d\tau. \quad (1)$$

С помощью методов теории оптимального управления [1–2] интегральное соотношение (1) преобразуем к системе дифференциальных уравнений. Введем комплексные $\Omega = \Omega_x - i\Omega_y$, $M = M_x - iM_y$ и запишем выражение для Ω_x и Ω_y в виде (1):

$$\begin{aligned} \Omega_x(t) = & \int_0^T M_x(\tau) (X \cos(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \cos(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau + \\ & + \int_0^T M_y(\tau) (X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Omega_y(t) = & \int_0^T -M_x(\tau) (X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau + \\ & + \int_0^T M_y(\tau) (X \cos(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \cos(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A(t) = & \int_0^t [M_x(\tau) X \cos(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(t) = & \int_0^t [M_x(\tau) X \cos(\eta^{(2)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(t) = & \int_0^t [-M_x(\tau) X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t) = & \int_0^t [-M_x(\tau) X \sin(\eta^{(2)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

© А. А. Гурченков, И. М. Иванов, А. И. Фесечко, 2010

Тогда $\Omega_x(t) = A(t) + B(t)$ и $\Omega_y(t) = C(t) + D(t)$. Запишем следующую систему:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{cases} \dot{\Omega}_x(t) = M_x(t)(X + Y) + \\ + \eta^{(1)}C(t) + \eta^{(2)}D(t), \\ \dot{\Omega}_y(t) = M_y(t)(X + Y) + \\ + \eta^{(1)}A(t) + \eta^{(2)}B(t), \\ \dot{A}(t) = M_x(t)X + \eta^{(1)}C(t), \\ \dot{B}(t) = M_x(t)X + \eta^{(2)}C(t), \\ \dot{C}(t) = M_y(t)X + \eta^{(1)}C(t), \\ \dot{D}(t) = M_y(t)X + \eta^{(2)}C(t); \end{cases} \quad (4)$$

$$x(0) = \begin{cases} \Omega_x(0) = 0, \\ \Omega_y(0) = 0, \\ A(0) = 0, \\ B(0) = 0, \\ C(0) = 0, \\ D(0) = 0. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения ($n = 6$, $m = 2$):

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{(1)} & \eta^{(2)} \\ 0 & 0 & -\eta^{(1)} & -\eta^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{(2)} \\ 0 & 0 & -\eta^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta^{(2)} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{n \times m} = \begin{pmatrix} X + Y & 0 \\ 0 & X + Y \\ X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$x_{0_{n \times 1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

С учетом (5) систему (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A \vec{x}(t) + B \vec{M}(t), \\ \vec{x}(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Задача безусловной минимизации с терминальным функционалом. Рассмотрим задачу оптимального управления без ограничений на управляющий момент. Будем использовать классический квадратичный терминальный функционал с квадратичной штрафной функцией.

Задача оптимального управления системой (6) имеет вид

$$\begin{aligned} J(M) &= (\Omega_x(T) - \Omega_1^0)^2 + (\Omega_y(T) - \Omega_2^0)^2 + \\ &+ \gamma \int_0^T (M_x^2(t) + M_y^2(t)) dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

или в векторном виде

$$\begin{aligned} J(M) &= \|Z \vec{x}(T; M) - b\|_{E^n}^2 + \\ &+ \gamma \int_0^T \|\vec{M}(t)\|_{E^m}^2 dt \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\vec{M}(t) = (M_x(t), M_y(t))^T$ – неизвестная функция управления; γ – заданное действительное положительное число; $Z = \|z_{i,j}\|_{6 \times 6}$ – матрица 6×6 , причем отличны от нуля только $z_{1,1} = z_{2,2}$; $b = (\Omega_1^0, \Omega_2^0, 0, 0, 0, 0)^T$ – столбец; $\Omega_i^0, i = 1, 2$ – заданные действительные числа.

Будем решать задачу (7) с использованием принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = \gamma \|\vec{M}(t)\|^2 + \langle A \vec{x}(t) + B \vec{M}(t), \psi(t) \rangle. \quad (8)$$

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -H'_x = -A^T \psi(t), \\ \psi(T) = \Phi' \left(x(T; \vec{M}) \right) = \\ = 2Z \left(Zx(T, \vec{M}) - b \right). \end{cases} \quad (9)$$

С учетом сопряженной системы выражения для оптимального управления запишем в виде

$$\begin{aligned} H'_{M_x} &= 2\gamma M_x + (X + Y)\psi_1 + \\ &\quad + X\psi_3 + Y\psi_4, \\ M_x^* &= -\frac{(X + Y)\psi_1 + X\psi_3 + Y\psi_4}{2\gamma}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H'_{M_y} &= 2\gamma M_y + (X + Y)\psi_2 + \\ &\quad + X\psi_5 + Y\psi_6, \\ M_y^* &= -\frac{(X + Y)\psi_2 + X\psi_5 + Y\psi_6}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения оптимального управления разрешим сопряженную систему (9). Из вида матрицы A^T можем сразу выписать выражения для первых двух компонент $\psi(t)$:

$$\psi_1(t) = 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0),$$

$$\psi_2(t) = 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0).$$

Остальные компоненты найдем, решив следующую систему:

$$\begin{aligned} \psi_3(t) &= 2\eta^{(1)} (\Omega_y(T) - \Omega_2^0) + \eta^{(1)}\psi_5(t), \\ \psi_4(t) &= 2\eta^{(2)} (\Omega_y(T) - \Omega_2^0) + \eta^{(2)}\psi_6(t), \\ \psi_5(t) &= -2\eta^{(1)} (\Omega_x(T) - \Omega_1^0) - \eta^{(1)}\psi_3(t), \\ \psi_6(t) &= -2\eta^{(1)} (\Omega_x(T) - \Omega_1^0) - \eta^{(1)}\psi_4(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения 1 и 3, 2 и 4 системы (12) можно решить независимо. В итоге получим

$$\begin{aligned} \psi_3(t) &= 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)(\cos((T-t)\eta^{(1)}) - 1) + \\ &\quad + 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)\sin(\eta^{(1)}(T-t)), \\ \psi_4(t) &= 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)(\cos((T-t)\eta^{(2)}) - 1) + \\ &\quad + 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)\sin(\eta^{(2)}(T-t)), \\ \psi_5(t) &= 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)(\cos(\eta^{(1)}(T-t)) - 1) + \\ &\quad + 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)\sin(\eta^{(1)}(T-t)), \\ \psi_6(t) &= 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)(\cos(\eta^{(2)}(T-t)) - 1) + \\ &\quad + 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)\sin(\eta^{(2)}(T-t)). \end{aligned}$$

Полученные решения сопряженной системы нужно подставить в (10) и (11), и окончательно значения оптимального управления можно будет записать, определив параметры $\Omega_x(t)$ и $\Omega_y(t)$. Для этого можно воспользоваться системой двух линейных уравнений относительно $\Omega_x(t)$ и $\Omega_y(t)$, которая получается из (2) и (3) при $t = T$ подстановкой в нее выражений (10) и (11) и найденных решений сопряженной системы (9). А именно:

$$\begin{aligned} \Omega_x(T) &= \int_0^T M_x^*(\tau)(X \cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &\quad + Y \cos(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau + \\ &\quad + \int_0^T M_y^*(\tau)(X \cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &\quad + Y \sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Omega_y(T) &= \int_0^T M_x^*(\tau)(X \sin(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &\quad + Y \sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau + \\ &\quad + \int_0^T M_y^*(\tau)(X \cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &\quad + Y \sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) окончательно решают поставленную задачу в аналитической форме.

3. Задача с разрывным управлением. Рассмотрим методический пример управления системой, реализующий максимальное отклонение Ω_x .

Задача оптимального управления имеет вид

$$\begin{aligned} J(M) &= \Omega_x(T) - \\ &\quad - \gamma \int_0^T (M_x(t) + M_y(t))dt \rightarrow \max, \\ 0 &\leq M_x(t) \leq 1, \quad 0 \leq M_y(t) \leq 1, \\ &\quad \forall t \in [0; T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Эквивалентная задача на минимум:

$$J(M) = \gamma \int_0^T (M_x(t) + M_y(t)) dt - \Omega_x(T) \rightarrow \min, \quad (16)$$

$$0 \leq M_x(t) \leq 1, \quad 0 \leq M_y(t) \leq 1,$$

$$\forall t \in [0; T].$$

В данной задаче нужно найти оптимальное управление системой (6), которое обеспечит максимальное отклонение Ω_x при определенном штрафе за величину управляющего момента, где γ – ценовой коэффициент. Функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (16) запишется в виде:

$$H = \gamma (M_x(t) + M_y(t)) + \langle A\vec{x}(t) + BM(t), \psi(t) \rangle, \quad (17)$$

где $M(t) = (M_1(t), M_2(t))^T$ – неизвестная функция управления; $\psi(t)$ – решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \psi_1(t) = -H'_x, \psi_i(T) = -A^T \psi(t), \\ \psi_1(T) = 1, \psi_i(T) = 0, i = 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (18)$$

Перепишем (18) в следующем виде (индексом внизу обозначены компоненты вдоль координатных осей x и y):

$$\begin{aligned} H &= M_x(t)((B^T \psi(t))_x - \gamma) + \\ &+ M_y(t)((B^T \psi(t))_y - \gamma) + \langle Ax(t), \psi(t) \rangle, \\ H &= \langle Ax(t), \psi(t) \rangle + M_x(t)((X + Y)\psi_1(t) + \\ &+ X\psi_3(t) + Y\psi_4(t) - \gamma) + \\ &+ M_y(t)((X + Y)\psi_2(t) + X\psi_5(t) + Y\psi_6(t) - \gamma). \end{aligned}$$

С учетом ограничений на управление (16) максимум функции Гамильтона–Понтрягина будет достигаться при условиях

$$\begin{cases} M_x(t) = 1, \text{ если } (X + Y)\psi_1(t) + \\ \quad + X\psi_3(t) + Y\psi_4(t) - \gamma \geq 0, \\ M_x(t) = 0, \text{ если } (X + Y)\psi_1(t) + \\ \quad + X\psi_3(t) + Y\psi_4(t) - \gamma < 0; \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} M_y(t) = 1, \text{ если } (X + Y)\psi_2(t) + \\ \quad + X\psi_5(t) + Y\psi_6(t) - \gamma \geq 0, \\ M_y(t) = 0, \text{ если } (X + Y)\psi_2(t) + \\ \quad + X\psi_5(t) + Y\psi_6(t) - \gamma < 0. \end{cases}$$

Решим сопряженную систему (19) и найдем условия для точек переключения

$$\psi_1(t) = 1, \quad \psi_2(t) = 0,$$

$$\psi_3(t) = \eta^{(1)}\psi_5(t),$$

$$\psi_4(t) = \eta^{(2)}\psi_6(t),$$

$$\psi_5(t) = -\eta^{(1)} - \eta^{(1)}\psi_3(t),$$

$$\psi_6(t) = -\eta^{(2)} - \eta^{(2)}\psi_4(t).$$

Решая уравнения для $\psi_3(t)$ и $\psi_5(t)$, $\psi_4(t)$ и $\psi_6(t)$ независимо, получим

$$\begin{cases} \psi_3(t) = \cos(\eta^{(1)}(T - t)) - 1, \\ \psi_5(t) = \sin(\eta^{(1)}(T - t)); \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \psi_4(t) = \cos(\eta^{(2)}(T - t)) - 1, \\ \psi_6(t) = \sin(\eta^{(2)}(T - t)). \end{cases}$$

Тогда условия для точек переключения t_{M_x} и t_{M_y} соответственно относительно компонент M_x и M_y оптимального управления будут выглядеть следующим образом:

$$X \cos(\eta^{(1)}(T - t_{M_x})) + \quad (20)$$

$$+ Y \cos(\eta^{(2)}(T - t_{M_x})) = \gamma,$$

$$X \sin(\eta^{(1)}(T - t_{M_y})) + \quad (21)$$

$$+ Y \sin(\eta^{(2)}(T - t_{M_y})) = \gamma.$$

Метод декомпозиции по базовым типам движения и взаимодействия формально выражен в виде разложения задачи динамики твердого тела с полостью, содержащей жидкость, на две части.

Первая, гидродинамическая, часть задачи сводится к решению некоторых стационарных краевых задач на собственные значения,

зависящих от геометрии полости и не зависящих от движения тела, и затем к расчету коэффициентов, характеризующих влияние жидкости на движение тела.

Вторая, динамическая, часть задачи сводится к решению уравнений движения твердого тела. Здесь существенным является то обстоятельство, что на характер возму-

щенного движения никаких ограничений не накладывается. Этот подход делает возможным широкую постановку различных задач оптимального управления, определения оптимальных конструктивно-технологических параметров динамической системы, изучения устойчивости движения управляемого объекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. – М. : ИЛ, 1962. – 336 с.
2. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М. : Наука, 1965. – 458 с.
3. Гурченков А. А. Вихревые движения жидкости в полости вращающегося тела / А. А. Гурченков. – М. : Нар. учитель, 2001.
4. Гурченков А. А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью / А. А. Гурченков // Изв. вузов. Приборостроение. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 44–49.

Поступила 26.10.10.

О МЕТОДАХ ОЦЕНКИ СОЧЕТАЕМОСТИ СЛОВ В МОДЕЛЯХ СЕМАНТИЧЕСКОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Н. П. Петрова

В статье охарактеризованы структура и особенности моделей семантического предпочтения. Рассмотрены методы оценки сочетаемости слов русского языка на основе эвристически определяемых числовых показателей. Указанные методы могут быть использованы при изучении лингвистических моделей и при решении прикладных задач компьютерной лингвистики.

Как известно [1; 3–6], в математической лингвистике различают *модели, которые воспроизводят построение, или порождение, текста, и модели, которые воспроизводят восприятие текста*. Модели первого рода называют *порождающими*, модели второго рода – *анализирующими*, или *аналитическими*.

Оба эти типа моделей можно объединить в один класс функциональных моделей речевой деятельности.

Под порождением текста понимается воплощение в данном тексте некоторого смысла посредством перехода «смысл → текст». Восприятие текста – это извлечение опреде-

© Н. П. Петрова, 2010