Известия Тульского государственного университета
Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч.1. С. 6–18

Математика

УДК 511.3

О гиперболическом параметре сетки *

Н. Н. Добровольский

Аннотация. Выводятся оценки для гиперболической дзета-функции сеток через гиперболические параметры сеток.

Ключевые слова: сетка, квадратурная формула, гиперболическая дзета-функция сетки, гиперболический параметр.

Введение

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_s$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ s-переменных с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \quad C(\vec{m}) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{x})}d\vec{x}$$

абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплекснозначных последовательностей (см. [7]).

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \tag{1}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)dx_1 \ldots dx_s$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00571-а).

средним взвешенным значением функции $f(x_1,\dots,x_s)$, вычисленным в точках
$$M_k = (\xi_1(k),\dots,\xi_s(k)) \qquad (k = 1\dots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Для произвольных целых $m_1,\dots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s)$, определённые равенством
$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\dots+m_s\xi_s(k)]}, \qquad (2)$$
называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем также рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*
$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка
$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{\rho(M)}{N}. \qquad (3)$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки, нормированная тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$, $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [3]). *

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*
$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$
$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \qquad (4)$$
и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвещенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

---

* Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\dots,m_s) \neq (0,\dots,0)$.

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_s^\alpha(C)$ $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_s^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_s^α с нормой, не превосходящей C, то есть шар в банаховом пространстве E_s^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство E_s^α состоит из функций $f(x_1,\ldots,x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(m_1,\ldots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)} \tag{5}$$

удовлетворяют условиям [*]

$$\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}|C(m_1,\ldots,m_s)|(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha=\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}<\infty. \tag{6}$$

Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1}\leqslant\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(\alpha))^s,$$

а поэтому для любого $\alpha>1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ пространство E_s^α является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_∞ — всех ограниченных комплекснозначных последовательностей (см. [7]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$. Очевидно, что $E_s\subset\mathfrak{A}_s$. Ясно, что класс E_s незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{l_1}$, но является всюду плотным множеством.

Рассмотрим понятие усеченной нормы вектора, которой называется величина $q(\vec{x})=\overline{x}_1\cdot\ldots\cdot\overline{x}_s$. Усеченной норменной поверхностью с параметром $t\geqslant 1$ называется множество $N_s(t)=\{\vec{x}|q(\vec{x})=t,\,\vec{x}\neq\vec{0}\}$, которое является границей гиперболического креста $K_s(t)$, заданного соотношениями $K_s(t)=\{\vec{x}|q(\vec{x})\leqslant t\}$. Для натурального t на усеченной норменной поверхности имеется $\tau_s^*(t)$ целых ненулевых точек, где

$$\tau_s^*(t)=\sum_{\vec{m}\in N(t)}{}' 1 \tag{7}$$

— число представлений натурального числа t в виде $t=\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s$.

[*] Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m}=\max(1,|m|)$. Таким образом, величину $\overline{m}$ можно назвать усеченной нормой числа m, что согласуется с понятием усеченной нормы вектора, о которой речь пойдет дальше.

Используя новые обозначения, можно написать другое выражение для нормы функции $||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha}$. Справедливо равенство

$$||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha} = \max\left(|C(\vec{0})|, \quad \sup_{t\in\mathbb{N}}\left(t^\alpha \cdot \max_{\vec{m}\in N(t)}|C(\vec{m})|\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что произвольная периодическая функция $f(\vec{x})$ из $E_s^\alpha(C)$ по модулю ограничена величиной $C\cdot(1+2\zeta(\alpha))^s$, при этом данная оценка достижима на функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty}\frac{C\cdot e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}}{(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s)^\alpha}$$

в точке $\vec{x}=\vec{0}$.

Очевидно, что $E_s^\alpha(C)\subset E_s^\beta(C)$ при $\alpha\geqslant\beta$. Для любой периодической функции $f(\vec{x})\in E_s^\alpha(C)\subset E_s^\beta(C)$ справедливо неравенство для норм

$$||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha}\geqslant||f(\vec{x})||_{E_s^\beta}.$$

Равенство достигается только для конечных тригонометрических многочленов вида

$$f(\vec{x}) = C(\vec{0}) + \sum_{\vec{m}\in N(1)} C(\vec{m})\, e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

В работе [3] дано следующее определение дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p\geqslant1$.

Определение 1. Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p\geqslant1$ называется функция $\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1)$ рядом Дирихле

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho}) = {\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(p,M,\vec{\rho},n)}{n^\alpha}, \qquad (8)$$

где

$$S^*(p,M,\vec{\rho},n) = \sum_{\vec{m}\in N(n)}|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p. \qquad (9)$$

Непосредственно из определения следует неравенство

$$\zeta(p\alpha,p|M,\vec{\rho})\leqslant\zeta^p(\alpha,1|M,\vec{\rho}) \quad (\alpha>1). \qquad (10)$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто дзета-функция сетки M с параметром p и писать $\zeta(\alpha,p|M)$.

Теорема 2. *Если $f(x_1,\dots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]|\leqslant C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right|+\frac{C}{N}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{|S_{M,\vec\rho}(\vec m)|}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}=$$

$$=C\left|S^*_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right|+C\cdot\zeta(\alpha,1|M,\vec\rho),\qquad(11)$$

где сумма $S_{M,\vec\rho}(\vec m)$ определена равенством (2). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 2 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (1) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}=\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right|+\frac{1}{N}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{|S_{M,\vec\rho}(\vec m)|}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}=$$

$$=\left|S^*_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right|+\zeta(\alpha,1|M,\vec\rho).\qquad(12)$$

Если рассмотреть класс $E_s^{\alpha,q}$ с нормой

$$\|f(\vec x)\|_{E_s^{\alpha,q}}=\left(|C(\vec 0)|^q+\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'|C(\vec m)|^q(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если $f(\vec x)\in E_s^{\alpha,q}$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]|\leqslant$$

$$\leqslant\|f(\vec x)\|_{E_s^{\alpha,q}}\left(\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right|^p+\frac{1}{N^p}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{|S_{M,\vec\rho}(\vec m)|^p}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\|f(\vec x)\|_{E_s^{\alpha,q}}\left(\left|S^*_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right|^p+\zeta(\alpha,p|M,\vec\rho)\right)^{\frac{1}{p}},\qquad(13)$$

где сумма $S_{M,\vec\rho}(\vec m)$ определена равенством (2). На классе $E_s^{\alpha,q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Доказательство. Действительно, по теореме 1

$$R_N[f]=C(\vec 0)\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right)+\frac{1}{N}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'C(\vec m)S_{M,\vec\rho}(\vec m)=$$

$$=C(\vec 0)\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec\rho}(\vec 0)-1\right)+\frac{1}{N}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'C(\vec m)(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^{\frac{\alpha}{p}}\frac{S_{M,\vec\rho}(\vec m)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^{\frac{\alpha}{p}}}.$$

Применим к правой части неравенство Гёльдера, получим

$$|R_N[f]| \leqslant \left(|C(\vec{0})|^q + {\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' |C(\vec{m})|^q (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot$$

$$\cdot \left(\left|\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \frac{1}{N^p} {\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} \left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как неравенство Гёльдера обращается в равенство при

$$C(\vec{0}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1; \\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) \neq 1; \end{cases}$$

и

$$C(\vec{m}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0; \\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 0; \end{cases} \qquad \vec{m} \neq \vec{0},$$

то теорема полностью доказана.

Из теорем 2 и 3 следует, что на классах E_s^α и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решетки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепипедальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решетки через гиперболический параметр решетки.

Цель данной работы — ввести понятие гиперболических параметров решетки и доказать аналог теоремы Бахвалова для гиперболической дзета-функции сеток.

1. Первый и второй гиперболические параметры сеток

В работе [9] было дано такое определение.

«Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ назовем величину

$$q\left(M, \rho(\vec{x})\right) = \min_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\vec{0}\}, |S(\vec{m})| > 0} \overline{m_1} \ldots \overline{m_s}\,. \text{»}$$

В этой статье использовались несколько иные обозначения. Так

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{|M|} \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

— тригонометрическая сумма сетки M с весами $\rho(\vec{x})$;

$$\zeta_H(M,\rho(\vec{x})|\alpha)={\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}}'\frac{|S(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}$$

— гиперболическая дзета-функции сетки M с весами $\rho(\vec{x})$.

Первое применение гиперболического параметра сетки вытекает из теоремы Абеля (см. [17], стр. 106), позволяющее представить гиперболическую дзету-функцию сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ в интегральном виде

$$\zeta_H(M,\rho(\vec{x})|\alpha)=\alpha\int\limits_{q(M,\rho(\vec{x}))}^{\infty}\frac{D(t|M,\rho(\vec{x}))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$D(t|M,\rho(\vec{x}))={\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s,\,\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\leqslant t}}'|S(\vec{m})|$$

— сумматорная функция тригонометрической суммы.

В работе [3] для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ на пространстве периодических функций E_s^α рассмотрен линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x})=A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k f[x_1+\xi_1(k),\ldots,x_s+\xi_s(k)]. \tag{14}$$

Через $A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})$ обозначается действие линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

Лемма 1. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x})=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{15}$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})=\frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N}C(\vec{m})=S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})C(\vec{m}), \tag{16}$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\leqslant\frac{\rho(M)}{N}\,\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \tag{17}$$

Доказательство. См. [3], стр. 194.

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$:

$$\begin{aligned}
K_0 = K_0(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0\}, &(18)\\
K_1 = K_1(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 1\}, &(19)\\
K_2 = K_2(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 1,\ |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1\}, &(20)\\
K_3 = K_3(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s \,|\, 0 < |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| < 1\}, &(21)\\
K_4 = K_4(M,\vec{\rho}) &= \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s \,|\, |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| > 1\}. &(22)
\end{aligned}$$

Ясно, что $\mathbb{Z}^s = K_0\bigcup K_1\bigcup K_2\bigcup K_3\bigcup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [3] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [3], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \varnothing$, а для несмещенного оператора имеем: $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1$.

Далее везде будем считать, что веса $\vec{\rho}$ выбраны так, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным. Для таких операторов выражение гиперболической дзета-функции сетки имеет более простой вид

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho}) = {\sum_{\vec{m}\in K_1\bigcup K_2}}' \frac{1}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha} + \sum_{\vec{m}\in K_3}\frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}. \tag{23}$$

Определение 2. Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ гиперболическим параметром $q(K)$ называется величина

$$q(K) = \min_{\vec{m}\in K}\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}. \tag{24}$$

Для пустого множества K полагается $q(K) = \infty$.

Используя это общее определение, в случае нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних можно определить первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$.

Определение 3. Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами

$$q_\nu\left(M,\rho(\vec{x})\right) = q(K_\nu\left(M,\rho(\vec{x})\right)) \quad (\nu = 1,2,3). \tag{25}$$

Ясно, что гиперболический параметр сетки и первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ связаны соотношением

$$q\left(M,\rho(\vec{x})\right) = \min_{\nu=1,2,3} q_\nu\left(M,\rho(\vec{x})\right).$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p, то есть в s-мерном кубе $G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_i < 1\,(i = 1, \ldots, s)\}$ имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \ldots, \frac{x_s^{(k)}}{p}\right) \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{26}$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leqslant x_i^{(k)} \leqslant p - 1$, p — натуральное.

Теорема 4. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедливо соотношение*

$$p \cdot \mathbb{Z}^s \subset K_1\left(M, \rho(\vec{x})\right),$$

кроме того тригонометрические суммы $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s.

Доказательство. Действительно, если

$$\vec{x}_k = \left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \ldots, \frac{x_s^{(k)}}{p}\right),$$

то $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ для любого $\vec{m} \in p \cdot \mathbb{Z}^s$, поэтому $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x}_k)} = 1$ и

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \rho(\vec{x}_k) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1,$$

так как линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным.

Аналогично получаем, что

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m} + p \cdot \vec{n}).$$

Следовательно, все различные значения тригонометрических сумм $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ содержатся среди $\vec{m} \in [-p_1, p_2]^s$, где $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$ и $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$.

Теорема 5. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x}_k)} = 1$ при $k = 1, \ldots, N$. Это означает, что $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ при $k = 1, \ldots, N$. Таким образом, $\vec{m} \in K_1(M, \vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ при $k = 1, \ldots, N$. Но если $\vec{m}_1, \vec{m}_2 \in K_1(M, \vec{\rho})$, то и $\vec{m}_1 \pm \vec{m}_2 \in$ $\in K_1(M, \vec{\rho})$, это означает, что $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.

Теорема 6. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что найдется $x \in [0,1)$ такой, что $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}_k)} = e^{2\pi ix}$ при $k = 1,\dots,N$. Это означает, что $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\} = x$ при $k = 1,\dots,N$.

Таким образом, $\vec{m} \in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\} = \{(\vec{m},\vec{x}_1)\}$ при $k = 1,\dots,N$.

Но если $\vec{m}_1,\vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$, то и

$$\vec{m}_1 \pm \vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho}),$$

это означает что $K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.

2. Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток

Для формулировки обобщенной теоремы Бахвалова для гиперболической дзета-функции сеток нам потребуется обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток из работы [5], одна лемма из работы [4] и одно новое определение.

Определение 4. Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, имеет тип $\Delta(N,s) < 1$, если для любого $\vec{m} \in K_3(M,\vec{\rho})$ выполняется оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \Delta(N,s).$$

Теорема 7. (***Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток***) *Для любой s-мерной решетки Λ справедливы оценки*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \begin{cases} (2+2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1 + \left[\dfrac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\ 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \dfrac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s-мерный куб $[-\lambda;\lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решетки Λ.

Доказательство. См. [5].

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leqslant \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha - 1 + \zeta(\alpha)}{\alpha - 1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right), \qquad (27)$$

где $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha}$ *— дзета-функция Римана при* $\alpha > 1$.

Доказательство. См. [4].

Теорема 8. (***Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток***) *Для любой рациональной сетки* M *со знаменателем* p *и с положительными весами* $\vec{\rho}$ *типа* $\Delta(N,s) < 1$, *для которых линейный оператор* $A_{M,\vec{\rho}}$ *взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leqslant 2^{(\alpha+1)s+1} \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^s \frac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q^{\alpha}(\Lambda)} +$$

$$+ \Delta^p(N,s) \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{s-1} t}{(\alpha-1)(s-1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{s-2} \zeta(\alpha)^{s-2-k} C_k^m \frac{\alpha - 1 + \zeta(\alpha)}{\alpha - 1} + \frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1} \right) \right), \qquad (28)$$

где решетка $\Lambda = K_1(M, \vec{\rho}) \bigcup K_2(M, \vec{\rho})$ *и* $t = q_3\,(M, \rho(\vec{x}))$.

Доказательство. Действительно, пользуясь формулой (23), теоремой 6 и обозначениями из формулировки доказываемой теоремы, получим

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \sum_{\vec{m} \in K_3} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \Delta^p(N,s) A_s(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\alpha+1)s+1} \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^s \frac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q^{\alpha}(\Lambda)} +$$

$$+ \Delta^p(N,s) \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{s-1} t}{(\alpha-1)(s-1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{s-2} \zeta(\alpha)^{s-2-k} C_k^m \frac{\alpha - 1 + \zeta(\alpha)}{\alpha - 1} + \frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1} \right) \right).$$

Список литературы

1. *Бахвалов Н.С.* О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестник МГУ. 1959. № 4. С. 3–18.
2. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов / Л.П. Добровольская [и др.] // Чебышевский сборник. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2012. Т. 13. Вып. 4 (44). С. 4–107.
3. *Добровольская Л.П., Добровольский Н.М., Симонов А.С.* О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2008. Т. 9. Вып. 1 (25). С. 185–223.
4. *Добровольский М.Н.* Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9. Вып. 1. С. 82–90.
5. *Добровольский Н.М.* Гиперболическая дзета функция решёток / Н.М. Добровольский — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — № 6090–84.
6. *Добровольский Н.М.* О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Н.М. Добровольский — Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. — № 6091–84.
7. *Добровольский Н.М., Манохин Е.В.* Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 3. С. 56–67.
8. О непрерывности дзета-функции сетки с весами / Н.М. Добровольский [и др.] // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7. Вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.
9. *Добровольский Н.Н.* ПОИВС ТМК: Гиперболический параметр сеток с весами // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: матер. Междун. научно-практической конф. Тула: Изд-во ТГПУ им Л.Н. Толстого, 2011. С. 266–267.
10. *Коробов Н.М.* Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестник МГУ. 1959. № 4. С. 19–25.
11. *Коробов Н.М.* О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С. 1207–1210.
12. *Коробов Н.М.* Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009–1012.
13. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
14. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Второе издание. М.: МЦНМО, 2004.
15. *Фролов К.К.* Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.
16. *Фролов К.К.* Квадратурные формулы на классах функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.
17. *Чандрасекхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.

Добровольский Николай Николаевич (nikolai.dobrovol-sky@gmail.com), аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

About hyperbolic parameter of nets

N. N. Dobrovolskiy

Abstract. We derive estimates for the hyperbolic zeta function of nets through hyperbolic parameter of nets.

Keywords: net, quadrature formula, hyperbolic zeta function of nets, hyperbolic parameter of nets.

Dobrovolskiy Nikolai (nikolai.dobrovol-sky@gmail.com), postgraduate student, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

Поступила 17.05.2013