
Теория вероятностей и математическая статистика

УДК 519.24

Об оценке скорости сходимости математического ожидания статистики L_N к линейному функционалу от спектральной плотности $L(f)$ стационарной гауссовской последовательности

А. Ю. Шомахов

*Кафедра Высшей математики
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
Стремянной пер. д. 36, 117997, Москва, Россия*

Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — вещественнозначная стационарная гауссовская центрированная последовательность, обладающая спектральной плотностью $f(\lambda)$. Рассматривается проблема оценивания скорости сходимости математического ожидания статистики $L_N = \int \varphi(\lambda) I_N(\lambda) d\lambda$, $\lambda \in [-\pi; \pi]$, где $I_N(\lambda)$ — периодограмма последовательности $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ к линейному функционалу от спектральной плотности $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$ стационарной гауссовской последовательности на основе выборки $\{X(1), X(2), \dots, X(N)\}$ объема N .

Ключевые слова: стационарный процесс, периодограмма процесса, спектральная плотность, спектральное среднее, асимптотическая несмещённость, классы Никольского, ядро Фейера.

Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — гауссовская стационарная последовательность со средним ноль ($EX(t) = 0$) и спектральной плотностью (с.п.) $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi; \pi]$, с $f(-\lambda) = f(\lambda)$, где E — оператор математического ожидания. Отметим также, что

$$EX(t)X(t') = \text{cov}(X(t), X(t')) = K(t, t') = k(t - t') = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-t')} f(\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

где $t, t' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а $K(t, t') = k(t - t')$ — ковариационная функция последовательности $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Стационарную случайную последовательность $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ предполагаем вещественнозначной (действительной). Рассматривается стационарная гауссовская случайная последовательность $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то есть случай дискретного времени, поэтому областью изменения Q переменной λ (частоты) является отрезок (сегмент) $[-\pi; \pi]$.

Рассмотрим так называемое спектральное среднее стационарной случайной последовательности $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то есть линейный функционал $L(f)$ вида [1–3]

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad (2)$$

где $\varphi(\lambda)$ — суммируемая функция, называемая спектрально-усредняющей (с.у.) функцией. В дальнейшем будем предполагать, что спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)$ вещественная и четная.

Заметим, что если $\varphi(\lambda)$ — индикатор отрезка (сегмента) $[-\pi; \mu]$, то

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\mu} f(\lambda) d\lambda = F(\mu),$$

где $F(\mu)$ — спектральная функция стационарной случайной последовательности $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Если $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda(t-t')}$, то

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-t')} f(\lambda) d\lambda = k(t-t'),$$

где $k(t-t')$ — ковариационная функция процесса $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

В качестве оценки $L(f)$ будем рассматривать статистику L_N вида [2, 4, 5]

$$L_N = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) I_N(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где $I_N(\lambda)$ — так называемая *периодограмма* процесса $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, которая имеет следующий вид

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X(t) e^{-it\lambda} \right|^2 \quad (4)$$

Напомним, что оценка L_N функционала $L(f)$ называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [E(L_N) - L(f)] = 0, \quad (5)$$

где N — объем выборки.

В работах [6, 7] проведена оценка скорости сходимости в (5), когда $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ принадлежат функциональным классам Никольского $H_p(\gamma)$ для процессов с непрерывным временем.

Эти функциональные классы определяются следующим образом [5]:

$$H_p(\gamma) = \left\{ \psi(\lambda) \in L_p, \left\| \psi^{(r)}(\lambda + h) - \psi^{(r)}(\lambda) \right\|_p \leq C|h|^\alpha \right\}, \quad (6)$$

где $0 < \alpha < 1$, $r \in N$, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\gamma = r + \alpha$, $p \geq 1$, C — константа, не зависящая от h , а

$$L_p = L_p(Q) = \left\{ f; \|f\|_p = \left(\int_Q |f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

— пространства суммируемых функций. Неравенство (6) выполняется при $\lambda \in [-\pi; \pi]$.

В работах [6, 7] оценена скорость сходимости в (5), когда спектральная плотность $f(\lambda) \in H_p(\gamma_1)$, спектральная усредняющая функция $\varphi(\lambda) \in H_q(\gamma_2)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \geq 1$, $q \geq 1$. Все вышеизложенное касалось процессов с непрерывным временем.

Цель настоящей работы — рассмотреть эту же задачу для процессов с дискретным временем. Рассматриваемая в данной работе проблема является частью общей проблемы непараметрического статистического оценивания $L(f)$ на основе выборки $\{X(1), X(2), \dots, X(N)\}$ объема N гауссовского стационарного центрированного ($EX(t) = 0$) случайного процесса $X(t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Замечание. Здесь и всюду ниже через C будем обозначать различные положительные постоянные. Все рассматриваемые функции, в том числе и спектральную плотность, будем считать периодичными с периодом 2π .

Для доказательства приведенной ниже теоремы нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Функция $F_N(u)$, называемая *ядром Фейера*, определяется следующим образом

$$F_N(u) = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\sin \frac{Nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2, \quad u \in [-\pi; \pi]. \quad (7)$$

Лемма 1. *Определенное по (7) ядро $F_N(u)$ является четным, неотрицательным и обладает следующими свойствами:*

$$1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) du = 1 \quad (8)$$

$$2) \quad \int_1^{\pi} F_N(u) du \leq CN^{-1} \quad (9)$$

$$3) \quad \int_0^1 F_N(u) u^\alpha du \leq \begin{cases} CN^{-\alpha}, & \text{при } \alpha < 1 \\ CN^{-1} \ln N, & \text{при } \alpha = 1 \\ CN^{-1}, & \text{при } \alpha > 1. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство приведено, например, в [8].

Лемма 2. *Справедливо следующее соотношение*

$$E(L_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y) f(x) \varphi(y) dy dx, \quad (11)$$

где $f(x)$ — спектральная плотность; $\varphi(y)$ — спектрально-усредняющая функция; $F_N(x-y)$ — ядро Фейера; E — оператор математического ожидания.

Доказательство приведено в [6].

Лемма 3. *Пусть $\psi(\lambda+u) \in H_p(\gamma)$ с $\gamma = r + \alpha$, где $r \in N$, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а)

$$\left\| \psi^{(j)} \right\|_p \leq C < \infty, \quad j = \overline{1, r} \quad (12)$$

б) функция $\psi(\lambda+u)$ разлагается в ряд Тейлора

$$\psi(\lambda+u) = \sum_{n=0}^r \frac{\psi^{(n)}(\lambda)}{n!} u^n + R(\lambda+u, \lambda), \quad (13)$$

где $R(\lambda + u, \lambda)$ — это остаточный член, удовлетворяющий неравенству

$$\|R(\lambda + u, \lambda)\|_p \leq \frac{C}{r!} |u|^{r+\alpha}. \quad (14)$$

Доказательство приведено, например, в [8].

Перейдем теперь к формулировке и доказательству результата данной работы.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) спектральная плотность $f(\lambda) \in H_p(\gamma_1)$, $0 < \gamma_1 < 1$, $p \geq 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda) \in H_q(\gamma_2)$, $0 < \gamma_2 < 1$, $q \geq 1$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
- 2) спектральная плотность $f(\lambda) \in H_p(\gamma_1)$, $\gamma_1 \geq 1$, $p \geq 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda) \in H_q(\gamma_2)$, $0 < \gamma_2 < 1$, $q \geq 1$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
- 3) спектральная плотность $f(\lambda) \in H_p(\gamma_1)$, $0 < \gamma_1 < 1$, $p \geq 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda) \in H_q(\gamma_2)$, $\gamma_2 \geq 1$, $q \geq 1$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
- 4) спектральная плотность $f(\lambda) \in H_p(\gamma_1)$, $\gamma_1 \geq 1$, $p \geq 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda) \in H_q(\gamma_2)$, $\gamma_2 \geq 1$, $q \geq 1$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Тогда

$$|K_N| \leq \begin{cases} CN^{-(\gamma_1+\gamma_2)}, & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 < 1 \\ CN^{-1} \ln N, & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ CN^{-1}, & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 > 1, \end{cases}$$

где $K_N = E(L_N) - L(f)$.

Доказательство. Согласно (11) имеем

$$\begin{aligned} E(L_N) &= \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda) d\lambda du = \frac{1}{2} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda) d\lambda du + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda) d\lambda du. \end{aligned}$$

Функция $F_N(u)$ является чётной, то есть $F_N(-u) = F_N(u)$, поэтому выражение $F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda)$ во втором двойном интеграле запишем следующим образом

$$F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda) = F_N(u) f(\lambda) \varphi(\lambda + u).$$

Тогда

$$E(L_N) = \frac{1}{2} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda) d\lambda du + \frac{1}{2} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} \int_{-\pi-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda) \varphi(\lambda + u) d\lambda du. \quad (15)$$

Учитывая (2), (8) и равенство $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda + u) \varphi(\lambda + u) d\lambda$, получим

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \varphi(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) du d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda du =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda du + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda + u) d\lambda du = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) \varphi(\lambda) + f(\lambda + u) \varphi(\lambda + u)) d\lambda du,
\end{aligned}$$

т.е. линейный функционал $L(f)$ можно представить в следующем виде

$$L(f) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) \varphi(\lambda) + f(\lambda + u) \varphi(\lambda + u)) d\lambda du. \quad (16)$$

Учитывая (15) и (16), получим

$$\begin{aligned}
E(L_N) - L(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda) d\lambda du + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda) \varphi(\lambda + u) d\lambda du - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda du - \\
&- \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda + u) \varphi(\lambda + u) d\lambda du = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) (f(\lambda) \varphi(\lambda + u) - \\
&- f(\lambda) \varphi(\lambda) - f(\lambda + u) \varphi(\lambda + u) + f(\lambda + u) \varphi(\lambda)) d\lambda du.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
E(L_N) - L(f) &= \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) (f(\lambda) [\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)] - f(\lambda + u) [\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)]) d\lambda du = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) (f(\lambda) - f(\lambda + u)) (\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)) d\lambda du.
\end{aligned}$$

Итак,

$$K_N = E(L_N) - L(f) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) (f(\lambda) - f(\lambda + u)) (\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)) d\lambda du. \quad (17)$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, из (17) находим, что

$$\begin{aligned}
|K_N| &= \left| \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) (f(\lambda) - f(\lambda + u)) (\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)) d\lambda du \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| F_N(u) \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - f(\lambda + u)) (\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)) d\lambda \right| du =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(u)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - f(\lambda + u))(\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)) d\lambda \right| du \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \int_{-\pi}^{\pi} |(f(\lambda) - f(\lambda + u))(\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda))| d\lambda du = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f(\lambda + u)| |\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)| d\lambda du \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda + u) - f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} du = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du.
\end{aligned}$$

Итак,

$$|K_N| \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du. \quad (18)$$

Далее, воспользовавшись неравенством Минковского (неравенство треугольника для пространств функций с интегрируемой p -й степенью), будем иметь

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda + u) - f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda + u)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} + \\
&+ \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda + u)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \|f(\lambda + u)\|_p + \|f(\lambda)\|_p. \quad (19)
\end{aligned}$$

Аналогично $\|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q \leq \|\varphi(\lambda + u)\|_q + \|\varphi(\lambda)\|_q$.

Далее, так как функции $f(\lambda)$ являются периодическими с периодом 2π , то

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda + u)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}},$$

т.е.

$$\|f(\lambda + u)\|_p = \|f(\lambda)\|_p, \quad (20)$$

где $-\pi \leq u \leq \pi$. Аналогично $\|\varphi(\lambda + u)\|_q = \|\varphi(\lambda)\|_q$, где $-\pi \leq u \leq \pi$. Тогда, учитывая (18), (19) и (20), получим

$$|K_N| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{-1} F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du + \\
& + \frac{1}{2} \int_1^{\pi} F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{-1} 2F_N(u) \|f(\lambda)\|_p 2\|\varphi(\lambda)\|_q du + \frac{1}{2} \int_1^{\pi} 2F_N(u) \|f(\lambda)\|_p 2\|\varphi(\lambda)\|_q du = \\
& = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du + \\
& + 2\|f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda)\|_q \int_{-\pi}^{-1} F_N(u) du + 2\|f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda)\|_q \int_1^{\pi} F_N(u) du.
\end{aligned}$$

В силу чётности функции $F_N(u)$ выходит, что

$$\begin{aligned}
|K_N| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du + \\
+ 4\|f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda)\|_q \int_1^{\pi} F_N(u) du. \quad (21)
\end{aligned}$$

Далее, учитывая оценку (9), окончательно получаем, что

$$|K_N| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) \|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q du + CN^{-1}. \quad (22)$$

Согласно лемме 3

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p &= \left\| \sum_{n=1}^{r_1} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} u^n + R_1(\lambda + u, \lambda) \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=1}^{r_1} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} u^n \right\|_p + \\
&+ \|R_1(\lambda + u, \lambda)\|_p \leq \sum_{n=1}^{r_1} \left\| \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} u^n \right\|_p + \|R_1(\lambda + u, \lambda)\|_p \leq \sum_{n=1}^{r_1} \left\| u^n f^{(n)}(\lambda) \right\|_p + \\
&+ \|R_1(\lambda + u, \lambda)\|_p = \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| \left\| f^{(n)}(\lambda) \right\|_p + \|R_1(\lambda + u, \lambda)\|_p \leq \\
&\leq C \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| + \frac{C}{r_1!} |u|^{r_1+\alpha_1} = C \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| + C |u|^{r_1+\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\|f(\lambda + u) - f(\lambda)\|_p \leq C \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| + C |u|^{r_1+\alpha_1}. \quad (23)$$

Аналогично,

$$\|\varphi(\lambda + u) - \varphi(\lambda)\|_q \leq C \sum_{j=1}^{r_2} |u^j| + C |u|^{r_2+\alpha_2}. \quad (24)$$

– Случай, когда $0 < \gamma_1 < 1$, $0 < \gamma_2 < 1$. Оценка (22) примет следующий вид

$$|K_N| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) C |u|^{\gamma_1+\gamma_2} du + CN^{-1} \quad (25)$$

Учитывая четность функции $F_N(u) |u|^{\gamma_1+\gamma_2}$, получим

$$|K_N| \leq C \int_0^1 F_N(u) |u|^{\gamma_1+\gamma_2} du + CN^{-1}. \quad (26)$$

Учитывая (10), приходим к завершению рассмотрения случая 1.

– Случай, когда $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 < 1$. Учитывая (22), (23) и тот факт, что $\varphi \in H_q(\gamma_2)$ означает, что $\|\varphi^{(r_2)}(\lambda + u) - \varphi^{(r_2)}(\lambda)\|_q \leq C |u|^{\alpha_2}$, где $\gamma_2 = r_2 + \alpha_2$, $0 < \alpha_2 < 1$ (у нас здесь $r_2 = 0$, так как $\gamma_2 < 1$), имеем следующую оценку

$$\begin{aligned} |K_N| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) \left(C \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| + C |u|^{r_1+\alpha_1} \right) C |u|^{\alpha_2} du + CN^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) C |u|^{\alpha_2} \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| du + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) C |u|^{\alpha_2} |u|^{r_1+\alpha_1} du + CN^{-1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем следующую оценку

$$|K_N| \leq C \sum_{n=1}^{r_1} \int_0^1 u^{n+\alpha_2} F_N(u) du + C \int_0^1 u^{\alpha_1+r_1+\alpha_2} F_N(u) du + CN^{-1}.$$

Учитывая (10), получим, что $|K_N| \leq CN^{-1}$.

Рассмотрение случая 2 закончено.

– Случай, когда $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 \geq 1$. Учитывая (22), (24) и тот факт, что $f \in H_p(\gamma_1)$ означает, что $\|f^{(r_1)}(\lambda + u) - f^{(r_1)}(\lambda)\|_p \leq C |u|^{\alpha_1}$, где $\gamma_1 = r_1 + \alpha_1$, $0 < \alpha_1 < 1$ (у нас здесь $r_1 = 0$, так как $\gamma_1 < 1$), имеем следующую оценку

$$\begin{aligned} |K_N| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) C |u|^{\alpha_1} \left(C \sum_{j=1}^{r_2} |u^j| + C |u|^{r_2+\alpha_2} \right) du + CN^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 C F_N(u) |u|^{\alpha_1} \sum_{j=1}^{r_2} |u^j| du + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 C F_N(u) |u|^{\alpha_1+r_2+\alpha_2} du + CN^{-1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем следующую оценку

$$|K_N| \leq C \sum_{j=1}^{r_2} \int_0^1 u^{j+\alpha_1} F_N(u) du + C \int_0^1 u^{\alpha_1+r_2+\alpha_2} F_N(u) du + CN^{-1}.$$

Учитывая (10), получим, что $|K_N| \leq CN^{-1}$.

Рассмотрение случая 3 закончено.

- Случай, когда $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 \geq 1$. Оценка (22), учитывая (23) и (24), примет следующий вид

$$\begin{aligned} |K_N| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_N(u) \left[C \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| + C |u|^{r_1+\alpha_1} \right] \left[C \sum_{j=1}^{r_2} |u^j| + C |u|^{r_2+\alpha_2} \right] du + CN^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 F_N(u) \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| \sum_{j=1}^{r_2} |u^j| du + \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 F_N(u) \sum_{n=1}^{r_1} |u^n| |u|^{r_2+\alpha_2} du + \\ &+ \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 F_N(u) |u|^{r_1+\alpha_1} \sum_{j=1}^{r_2} |u^j| du + \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 F_N(u) |u|^{r_1+\alpha_1} |u|^{r_2+\alpha_2} du + CN^{-1} = \\ &= C \sum_{n=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \int_0^1 F_N(u) u^{n+j} du + C \sum_{n=1}^{r_1} \int_0^1 F_N(u) u^{n+r_2+\alpha_2} du + \\ &+ C \sum_{j=1}^{r_2} \int_0^1 F_N(u) u^{r_1+\alpha_1+j} du + C \int_0^1 F_N(u) u^{r_1+\alpha_1+r_2+\alpha_2} du + CN^{-1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} |K_N| &\leq C \sum_{n=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \int_0^1 F_N(u) u^{n+j} du + C \sum_{n=1}^{r_1} \int_0^1 F_N(u) u^{n+r_2+\alpha_2} du + \\ &+ C \sum_{j=1}^{r_2} \int_0^1 F_N(u) u^{r_1+\alpha_1+j} du + C \int_0^1 F_N(u) u^{r_1+\alpha_1+r_2+\alpha_2} du + CN^{-1}. \end{aligned}$$

Учитывая (10), получим, что $|K_N| \leq CN^{-1}$. Рассмотрение случая 4 закончено.

Теорема доказана. $\square$

Литература

1. Бенткус Р., Рудзкис Р., Статулявичус В. Экспоненциальные неравенства для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности // Литовский математический сборник. — 1975. — Т. 15. — С. 25–39. [Bentkus R., Rudzakis R., Statulyavichus V. Ekhsponecialnihe neravenstva dlya ocenok spektra stacionarnoyj gaussovskoyj posledovatel'nosti // Litovskiyj matematicheskiy sbornik. — 1975. — Т. 15. — С. 25–39.]
2. Гиновян М. С. Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули // Теория вероятностей и её применение. — 1988. — Т. 33, вып. 2. — С. 315–322.

- [Ginovyayn M. S. Asimptoticheski ehffektivnoe neparametricheskoe ocenivanie funktsionalov ot spektral'noy plotnosti, imeyutheyj nuli // Teoriya veroyatnostey i eyo primeneniye. — 1988. — Т. 33, вып. 2. — С. 315–322.]
3. Ибрагимов И. А. Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса // Теория вероятностей и её применение. — 1963. — Т. 8, вып. 4. — С. 391–430. [Ibragimov I. A. Ob ocenke spektral'noy funktsii stacionarnogo gaussovskogo processa // Teoriya veroyatnostey i eyo primeneniye. — 1963. — Т. 8, вып. 4. — С. 391–430.]
 4. Гиновьян М. С. Об оценке значения линейного функционала от спектральной плотности стационарного гауссовского процесса // Теория вероятностей и её применение. — 1988. — Т. 33, вып. 4. — С. 777–781. [Ginovyayn M. S. Ob ocenke znacheniya lineynogo funktsionala ot spektral'noy plotnosti stacionarnogo gaussovskogo processa // Teoriya veroyatnostey i eyo primeneniye. — 1988. — Т. 33, вып. 4. — С. 777–781.]
 5. Ибрагимов И. А., Хасъминский Р. З. Об оценке значения линейного функционала от плотности распределения // Записки научного семинара ЛОМН. — 1986. — Т. 153. — С. 45–53. [Ibragimov I. A., Khasjminskiy R. Z. Ob ocenke znacheniya lineynogo funktsionala ot plotnosti raspredeleniya // Zapiski nauchnogo seminar LOMI. — 1986. — Т. 153. — С. 45–53.]
 6. Ginovian M. S. Asymptotic Properties of Spectrum Estimate of Stationary Gaussian Processes // Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika. — 1995. — Vol. 30, No 1. — Pp. 1–16.
 7. Шомахов А. Ю. Об оценке скорости сходимости математического ожидания статистики L_T к линейному функционалу от спектральной плотности $L(f)$ стационарного гауссовского процесса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». — 2010. — № 1(36). — С. 89–99. [Shomakhov A. Yu. Ob ocenke skorosti skhodimosti matematicheskogo ozhidaniya statistiki L_T k lineynomu funktsionalu ot spektral'noy plotnosti $L(f)$ stacionarnogo gaussovskogo processa // Vestnik MGTU im. N.Eh. Bauman. Ser. «Estestvennihe nauki». — 2010. — No 1(36). — С. 89–99.]
 8. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с. [Nikol'skiy S. M. Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennikh i teoremi vlozheniya. — M.: Nauka, 1969. — 480 s.]

UDC 519.24

On Estimation of Convergence Rate of Statistics Expectancy L_N to Linear Functional of Spectral Density $L(f)$ of Stationary Gaussian Process

A. Yu. Shomakhov

*Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny per. 36, 117997, Moscow, Russian*

For the real-valued stationary Gaussian centered process $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, with a spectral density $f(\lambda)$, a problem is considered of estimating the convergence rate of expectancy of statistics $L_N = \int \varphi(\lambda) I_N(\lambda) d\lambda$, $\lambda \in [-\pi; \pi]$, where $I_N(\lambda)$ is a periodogram of a process $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, to a linear functional of the spectral density $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$ of the stationary Gaussian process based on the sample $\{X(1), X(2), \dots, X(N)\}$.

Key words and phrases: stationary process, periodogram of a process, spectral density, spectral mean, asymptotic unbiasedness, Nikolsky classes, Fejér kernel.