УДК 519.710.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ В ОБЩЕСТВЕ

М.В. Драпалюк, С.П. Зубова, Фам Туан Кыонг, Е.В. Раецкая

Статья посвящена построению математической модели динамической системы, описывающей распространение эпидемического заболевания в обществе. Исследуется полная наблюдаемость полученной дифференциально-алгебраической системы. Применяется метод каскадного расщепления исходной системы на уравнения в подпространствах. Выводится формула для нахождения вектора состояний системы. Между входной и выходной функциями устанавливается связь, необходимая и достаточная для реализации описываемого процесса

Ключевые слова: математическая модель, нелинейная система наблюдения

Формирование обратной связи в системах автоматического управления возможно лишь после получения полной информации о состоянии объекта управления. Если все компоненты состояния доступны для измерения, исследователь располагает возможностью выбрать обратную связь, обеспечивающую наиболее оптимальные динамические свойства обследуемой системы. Однако, при решении практических задач, приходиться сталкиваться с ситуацией, когда измерению поддаются лишь некоторые компоненты вектора состояния системы или их линейные комбинации. В большинстве случаев это связано с недостаточным количеством измерительных приборов в системе, а также и с невозможностью их монтирования вследствие объективно возникающей труднодоступности измеряемых параметров .

В связи с этим актуальна задача выявления возможности получения информации о векторе состояния по измеряемым, наблюдаемым входным, выходным функциям, а именно, задача наблюдения. Для исследования процесса распространения информации (новых идей) в обществе исследуемое население делится на три группы так, что $x_1(t)$ - группа населения, восприимчивая к новой информации, $x_2(t)$ - информированная группа населения, а $x_3(t)$ - группа населения, исключенная из первоначального числа исследуемых (по причине изоляции). Скорость, с которой появляются новые восприимчивые к информации равна $f_1(t)$, а скорость, с которой появляются новые информированные, равна $f_2(t)$. Нелинейное слагаемое $x_1(t)x_2(t)$ отражает взаимодействие между группами населения. При этом взаимодействие между введенными параметрами описывается следующими соотношениями (см. [1]):

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\alpha x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t) + f_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\gamma x_2(t) + \beta x_1(t)x_2(t) + f_2(t), \qquad (2)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \alpha x_1(t) + \gamma x_2(t). \qquad (3)$$

Заметим, данная нелинейная система также может рассматриваться при моделировании распространения эпидемического заболевания в обществе (см. [1]).

Вводим дополнительную наблюдаемую (измеряемую) входную функцию:

$$F(t) = ax_1(t) + bx_2(t) + cx_3(t), \qquad (4)$$

которая отражает соотношение между тремя группами населения $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Заметим, данная функция (наблюдаемый вход), в общем случае, предоставляет исследователю лишь частичную информацию о компонентах состояния.

Математическая модель исследуемой системы представляется в общем виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + G(t, x(t)) + f(t), \qquad (5)$$

$$F(t) = Ax(t), \qquad (6)$$

где $B: R^n \to R^n$, $A: R^n \to R^s$, $x(t) \in R^n$, $f(t) \in R^n$, $F(t) \in R^s$, нелинейная функция $G(t, x(t)) \in R^n$, $t \in [0, T]$ (T - конечно или бесконечно).

Вектор-функция $x(t)$ называется вектором состояний системы, $f(t)$ и $F(t)$ входной и выходной функциями, соответственно.

Драпалюк Михаил Валентинович – ВГЛТА, д-р техн. наук, профессор, тел. 8-919-180-64-26
Зубова Светлана Петровна – ВГУ, канд. физ.-мат. наук, доцент, тел. 8-951-851-36-30, тел. (473) 266-60-76
Фам Туан Кыонг – ВГУ, аспирант, тел. 8-951-563-00-82
Раецкая Елена Владимировна – ВГЛТА, канд. физ.-мат. наук, доцент, тел. 8-910-340-68-61, тел. (473) 225-16-92

Система (5), (6) называется полностью наблюдаемой, если по наблюдаемым входной и выходной функциям состояние системы в любой момент времени определяется однозначно.

Таким образом, получена математическая модель в виде нелинейной динамической системы наблюдения, отражающая в математической форме важнейшие свойства системы (1) - (4) и связи, присущие её составным частям.

В данной работе проводится качественный анализ полученной математической модели, представляющей собой дифференциально-алгебраическую нелинейную систему (5) - (6). Для исследования полной наблюдаемости данной нелинейной системы применяется метод каскадного расщепления исходного пространства на подпространства и перехода к системам вполне аналогичным исходной, но относительно элементов из подпространств. Этот метод был разработан ранее для исследования полной управляемости и полной наблюдаемости линейных систем, то есть при $G(t, x(t)) \equiv 0$ (см. [2] – [6]). Применение данного метода дает хорошие результаты, при исследовании математических моделей, представленных в работах [7] – [13].

В данной работе на одном из этапов исследования производится упрощение математической модели, что позволяет оптимизировать её анализ, а именно, понизить порядок системы уравнений, образующих модель.

Указанный подход позволяет за конечное число шагов выявить полную наблюдаемость или ненаблюдаемость рассматриваемой системы. Несомненным достоинством метода является возможность построения функции состояния полностью наблюдаемой системы в явном виде.

В данной работе будем использовать следующие свойства матриц. Матрице А соответствуют разложения:

$$R^n = CoimA \dotplus KerA,$$

$$R^s = \operatorname{Im} A \dotplus CokerA, \qquad (7)$$

где $\operatorname{Im} A$ – множество значений A в R^n, $KerA$ – множество решений уравнения $Ax = 0$ в R^n, $CoimA$ – прямое дополнение к подпространству $KerA$ в R^n, $CokerA$ – прямое дополнение к подпространству $\operatorname{Im} A$ в R^s. Через $P(A)$ и $Q(A)$ обозначим проекторы на подпространства $KerB$ и $CokerA$, соответственно, а $(I - P(A))$ и $(I - Q(A))$ – проекторы на подпространства $CoimA$ и $\operatorname{Im} A$, соответственно; I – единичная матрица в соответствующем пространстве. Разложение (7) таково, что сужение $\tilde{A}$ отображения A на подпространство $CoimA$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между подпространствами $CoimA$ и $\operatorname{Im} A$.

Введем полуобратную матрицу:

$$A^{-} = \tilde{A}^{-1}(I - Q(A)).$$

Уравнение (6) исходной системы эквивалентно системе:

$$\begin{cases} Q(A)F(t) = 0, & (8) \\ x(t) = A^{-}F(t) + x_1(t), & (9) \end{cases}$$

с произвольной вектор-функцией $x_1(t) = P(A)x(t) \in KerA$.

В зависимости от свойств матрицы A возможны три случая.

I. $A = 0$. Второе алгебраическое уравнение системы (5), (6) имеет вид: $F(t) \equiv 0$. Функция состояния $x(t)$ находится как решение дифференциального уравнения (5) неединственным образом. Система (5), (6) является ненаблюдаемой.

II. $KerA = \{0\}$. Функция состояния $x(t)$ определяется единственным образом по формуле (9) и имеет вид:

$$x(t) = A^{-}F(t). \qquad (10)$$

То есть в случае инъективной матрицы A система является полностью наблюдаемой. Заметим, исходная система (5), (6) является корректной при условии дифференцируемости функции $A^{-}F(t)$.

При подстановке выражения для $x(t)$ вида (10) в уравнение (5), получаем уравнение связи:

$$\frac{dA^{-}F(t)}{dt} = BA^{-}F(t) + G(t, A^{-}F(t)) + f(t), \qquad (11)$$

соотношение, которому необходимо должны удовлетворять входная и выходная функции для реализации процесса, описываемого системой.

III. Перейдем к более общему случаю $A \neq 0$ и $KerA \neq \{0\}$. Подставив выражение для функции состояния вида (9) в уравнение (5), получим выражение:

$$\frac{dP(A)x(t)}{dt} + \frac{dA^{-}F(t)}{dt} = BP(A)x(t) +$$

$$+G(t, P(A)x(t) + A^{-}F(t)) + BA^{-}F(t) + f(t). \qquad (12)$$

В соответствии с разложением (7), оно сводится к эквивалентной системе относительно элементов из подпространств $CoimA$ и $KerA$:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = B_1 x_1(t) + G_1(t, x_1(t)) + f_1(t), \qquad (13)$$

$$F_1(t) = A_1 x_1(t), \qquad (14)$$

где

$x_1(t) = P(A)x(t) \in KerA$,

$B_1 = P(A)BP(A) : KerA \to KerA$,

$A_1 = (I - P(A))BP(A) : KerA \to CoimA$,

$f_1(t) = P(A)(BA^{-}F(t) + f(t)) \in KerA$,

$G_1(t, x_1(t)) = P(A)G(t, A^{-}F(t) + x_1(t)) \in KerA$,

$F_1(t) = \dfrac{dA^{-}F(t)}{dt} -$

$-(I - P(A))(BA^{-}F(t) + f(t)) \in CoimA$.

Заметим, такой переход от исходной системы (5), (6) к системе (13), (14) реализуется лишь при выполнении условия:

$$(I - P(A))G(t, A^{-}F(t) + x_1(t)) \equiv 0. \qquad (15)$$

Потребуем выполнения этого условия.

При исследовании полной наблюдаемости редуцированной системы (13), (14) первого шага расщепления применим тот же метод, что и при исследовании исходной системы (5), (6).

В силу конечномерности исходного пространства, за конечное, равное p $(p \le n)$ число шагов перейдем к редуцированной системе последнего шага каскадного расщепления:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = B_p x(t) + G_p(t, x_p(t)) + f_p(t), \qquad (16)$$

$$F_p(t) = A_p x(t) \;, \qquad (17)$$

которая вполне аналогична исходной системе при условии выполнения на каждом шаге ряда условий и ограничений:

$$Q_i(A_i)F_i(t) = 0 \quad , i = \overline{1, p}, \qquad (18)$$

$$(I - P(A_i))G_i(t, x_i(t)) \equiv 0 \,, i = \overline{1, p-1}. \qquad (19)$$

В зависимости от свойств и вида матрицы A_p, возможны лишь два случая.

I. $A_p = 0$. Система (16), (17) является ненаблюдаемой, а значит, и исходная система (5), (6) является ненаблюдаемой.

II. $KerA_p = \{0\}$. Функция состояния $x_p(t)$ определяется единственным образом по формуле: $x_p(t) = A_p^{-}F_p(t).$ (20)

Функция состояния исходной системы (5), (6) единственным образом восстанавливается по формуле: $x(t) = A^{-}F(t) + \sum\limits_{i=1}^{p} A_i^{-}F_i(t).$ (21)

То есть в случае инъективной матрицы A_p, исходная система является полностью наблюдаемой при условии выполнения ограничений и условий (18), (19). Вернемся к примеру. Здесь:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, ($A$ - сюръективная матрица),

$$B = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \; f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G(t, x(t)) = \begin{pmatrix} -\beta x_1(t)x_2(t) \\ \beta x_1(t)x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы подпространства $KerA$ в данном случае можно взять в виде:

$$KerA = \left\{ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ -\frac{a}{c}x_1(t) - \frac{b}{c}x_2(t) \end{pmatrix} \right\},$$

с матрицей проектора:

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражение (9) принимает вид:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{c}x_1(t) + \frac{b}{c}x_2(t) + x_3(t) \end{pmatrix} + \qquad (22)$$

$$+ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ -\frac{a}{c}x_1(t) - \frac{b}{c}x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Условие (15) имеет вид:

$$a = b. \qquad (23)$$

Матрица $A \ne 0$ такова, что $KerA \ne \{0\}$, то есть на первом шаге расщепления получаем случай III. От исходной системы (1)-(4) с учётом условия разрешимости и ограничения (23) переходим к редуцированной системе первого шага:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\alpha x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t) + f_1(t) \;, \qquad (24)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\gamma x_2(t) + \beta x_1(t)x_2(t) + f_2(t) \;, \qquad (25)$$

$$-\frac{a}{c}\frac{dx_1(t)}{dt}-\frac{a}{c}\frac{dx_2(t)}{dt}=\alpha x_1(t)+\gamma x_2(t)\ , \qquad (26)$$

$$a(f_1(t)+f_2(t))-\dot{F}(t)=(c-a)(\alpha x_1(t)+\gamma x_2(t))\ . \qquad (27)$$

Дальнейшее исследование полной наблюдаемости вновь полученной системы можно производить изложенным выше методом. Однако, построение проекторов зачастую требует значительных громоздких выкладок. На практике, как правило, более рациональным является непосредственный переход к эквивалентным системам меньшего порядка. Так система (1)-(4) эквивалентными преобразованиями сводится к системе:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=-\alpha x_1(t)-\beta x_1(t)x_2(t)+f_1(t)\ , \qquad (28)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-\gamma x_1(t)+\beta x_1(t)x_2(t)+f_2(t)\ , \qquad (29)$$

$$\frac{a}{c}\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{a}{c}\frac{dx_2(t)}{dt}=-\alpha x_1(t)-\gamma x_2(t)+\frac{1}{c}\frac{dF}{dt}\ , \qquad (30)$$

$$x_3(t)=\frac{1}{c}F(t)-\frac{a}{c}x_1(t)-\frac{b}{c}x_2(t)\ . \qquad (31)$$

Рассмотрим случай: $a=b\neq c\neq 0$. От уравнений (24), (25), (26) переходим к соотношению:

$$\alpha x_1(t)+\gamma x_2(t)=\frac{1}{c-a}\left(\frac{dF(t)}{dt}-a(f_1(t)+f_2(t))\right), \qquad (32)$$

откуда:

$$x_2(t)=-\frac{\alpha}{\gamma}x_1(t)+\varphi(t)\ , \qquad (33)$$

с обозначением:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\gamma(c-a)}\left(\frac{dF(t)}{dt}-a(f_1(t)+f_2(t))\right). \qquad (34)$$

Уравнения (1), (2) принимают вид:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{\beta\alpha}{\gamma}x_1^2(t)-(\beta\varphi(t)+\alpha)x_1+f_1(t)\ , \qquad (35)$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt}&=\beta x_1^2(t)-\frac{\gamma}{\alpha}(\beta\varphi(t)+\alpha)x_1(t)-\\&-\frac{\gamma}{\alpha}(f_2(t)-\gamma\varphi(t)-\frac{d\varphi(t)}{dt}),\end{aligned} \qquad (36)$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\gamma}x_1^2(t)-\frac{(\alpha-\gamma)(\beta\varphi(t)+\alpha)}{\alpha}x_1(t)+\\&+f_1(t)-\frac{\gamma}{\alpha}\left(f_2(t)-\gamma\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)=0.\end{aligned} \qquad (37)$$

Таким образом, от системы (1)-(4) пришли к эквивалентной системе:

$$x_3(t)=\frac{1}{c}F(t)-\frac{a}{c}x_1(t)-\frac{b}{c}x_2(t)\ , \qquad (38)$$

$$x_2(t)=-\frac{\alpha}{\gamma}x_1(t)+\varphi(t)\ , \qquad (39)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\gamma}x_1^2(t)-\frac{(\alpha-\gamma)(\beta\varphi(t)+\alpha)}{\alpha}x_1(t)+\\&+f_1(t)-\frac{\gamma}{\alpha}\left(f_2(t)-\gamma\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)=0,\end{aligned} \qquad (40)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{\beta\alpha}{\gamma}x_1^2(t)-(\beta\varphi(t)+\alpha)x_1+f_1(t)\ . \qquad (41)$$

Если $\alpha=\gamma$, то входная и выходная функции удовлетворяют соотношению:

$$\frac{\alpha}{\gamma}f_1(t)-\gamma(f_2(t)-\gamma\varphi(t)-\frac{d\varphi(t)}{dt})=0\ , \qquad (42)$$

и исходная система является ненаблюдаемой, так как компонента состояния $x_1(t)$ находится как решение дифференциального уравнения (35) неединственным образом.

В случае $\alpha\neq\gamma$ при выполнении условия:

$$\begin{aligned}&\frac{(\alpha-\gamma)\gamma}{4\alpha\beta}(\beta\varphi(t)+\alpha)^2=\\&\alpha f_1(t)-\gamma\left(f_2(t)-\gamma\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\end{aligned}\ , \qquad (43)$$

компонента состояния $x_1(t)$ находится из уравнения (37) единственным образом и имеет вид:

$$x_1(t)=\frac{\gamma}{2\alpha\beta}(\beta\varphi(t)+\beta)\ . \qquad (44)$$

Компоненты состояния $x_2(t)$ и $x_3(t)$ с учетом выражения (44), находятся, соответственно, по формулам (33), (31) и имеют вид:

$$x_2(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)-\frac{\alpha}{2\beta}\ , \qquad (45)$$

$$x_3(t)=\frac{1}{c}F(t)-\frac{a(\gamma+\alpha)}{2\alpha c}\varphi(t)+\frac{a(\alpha-\gamma)}{2\beta c}. \qquad (46)$$

При подстановке выражения для $x_1(t)$, $x_2(t)$ вида (45), (46), в уравнение (31), получим уравнение связи для входной и выходной функции.

Таким образом, в случае, когда входная и выходная функции удовлетворяют условию (43), а коэффициенты системы удовлетворяют условиям:

$b=a\neq c\neq 0$ и $\alpha\neq\gamma$,

система (1)-(4) является полностью наблюдаемой, а компоненты функции состояния определяются по формулам (44), (45), (46).

Литература

1. Дорф Р. Современные проблемы управления/ Р. Дорф, Р. Бишоп // Пер. с англ. Б.И. Копылова. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.

2. Раецкая Е.В. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук /

Воронежская государственная лесотехническая академия. Воронеж, 2004 г. 149 стр.

3. Зубова С.П. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления / Зубова С.П., Раецкая Е.В., Ле хай чунг// *Автоматика и телемеханика*. 2008. *№ 11*. С. 41-47.

4. Зубова С.П. Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж 2010. Том 6, № 8, 2010 г. – С. 82-86.

5. Зубова С.П. Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов. – 2010. – Том 15, вып. 6. – С. 1678-1679.

6. Драпалюк М.В. Макроэкономическая модель управления тенденциями потребления и накопления в национальном доходе/ М.В. Драпалюк, Е.В. Раецкая// Моделирование систем и процессов , № 3-4. Воронеж, ВГЛТА, 2009. С. 20-22.

7. Драпалюк М.В. Оценка энергоёмкости рабочего процесса машины для понижения пней/ М.В. Драпалюк М.В., Попиков П.И., Цуриков А.И., Беликов Е.В. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2007. № 5. С. 61-62.

8. Драпалюк М.В. Имитационная модель ротора кустореза с гибкими рабочими органами / М.В. Драпалюк, Л.Д.Бухтояров, С.А. Столбовских // Вестник Красноярского государственного аграрного университета. 2011. № 3. С. 137-141.

9. Драпалюк М.В. Математическое моделирование рабочего процесса рычажного корчевателя/ Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2012. № 75. С. 156-165.

10. Драпалюк М.В. Математическая модель управления процессом обрезки крон деревьев машиной манипуляторного типа с дисковой пилой / П.И. Попиков, М.В. Драпалюк, В.П. Попиков // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2011. № 74. С. 25- 36.

11. Драпалюк М.В. Математическая модель управления вибрационным процессом подрезания корней саженцев лесных культур /М.А. Платонова, М.В. Драпалюк // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2011. № 74. С. 25- 36.

12. Драпалюк М.В. Математическая модель процесса подрезки корней сеянцев и саженцев в питомниках / М.В. Драпалюк М.В., П.И. Попиков, М.В. Кондратов// Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2006. № 53. С. 111-114.

13. Драпалюк М.В. Имитационное моделирование технологического процесса лесной машины с гидроприводом дискового рабочего органа / В.Н. Коротких, В.П. Попиков, М.В. Драпалюк // Вестник Красноярского государственного аграрного университета. 2009. № 5. С. 129-132.

Воронежская государственная лесотехническая академия
Воронежский государственный университет

THE RESEARCHING OF COMPLETE OBSERVABILITY OF THE DYNAMICAL SYSTEM THAT MODELS THE DISTRIBUTION OF INFORMATION IN SOCIETY

M.V. Drapaluk, S.P. Zubova, Pham Tuan Cuong, E.V.Raetskaya

The article is devoted to constructing a mathematical model of the dynamic system describing the distribution of information in society. The complete observability of the resulting differential-algebraic system is studied. The method of cascade splitting the original space to the subspace are used. The formula for finding the state vector are derived. The relation between input and output functions are obtained.

Key words: mathematical model, nonlinear system of observation