

ВЛИЯНИЕ ЛЮФТА И СУХОГО ТРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАТРОННОГО ПРИВОДА (АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ)

Ч.К. Нгуен

(Санкт-Петербургский государственный морской технический университет)

Научный руководитель – кандидат технических наук, доцент В.Н. Шамберов
(Санкт-Петербургский государственный морской технический университет)

В работе предлагается математическая модель мехатронного привода, в которой учтены такие естественные нелинейности, как люфт и сухое трение. Модель исследуется методом точечных отображений на предмет выяснения причин и механизма возникновения в системе автоколебательных режимов.

Введение

За сравнительно короткий период существования мехатронные приводы, объединяющие в себе силовые качества механики с постоянно расширяющимися возможностями микроэлектроники, стали изделиями современных технологий. Высокое отношение выходной мощности к весу дает таким системам ощутимое преимущество, когда требуется точное управление движением при ограничениях на допустимые размеры и вес. По своей сути мехатронный привод представляет собой замкнутую автоматическую систему. Как правило, большинство таких систем являются существенно нелинейными из-за естественных нелинейностей, присущих механическим элементам их управляющих устройств.

Стремление в максимальной степени повысить точность и быстродействие привода часто приводит к тому, что нелинейности начинают оказывать решающее влияние на динамику и могут стать причиной возникновения нежелательного поведения технического объекта (возникновение автоколебательных режимов), вплоть до потери свойств устойчивости и создания аварийной ситуации.

Наиболее «вредными» с точки зрения их влияния на устойчивость автоматических систем являются такие нелинейности, как люфт и сухое трение.

Для успешного изучения нелинейных явлений, связанных с потерей устойчивости, необходима правильная математическая модель изучаемого явления, поскольку эффективность теоретического исследования во многом зависит от имеющейся в наличии содержательной математической модели физического явления, правильно отражающей его суть.

Целью данной работы является построение содержательной математической модели автоматической системы с люфтом и сухим трением и исследование ее пространства состояний (фазового пространства) на предмет выяснения причин и механизма возникновения в системе автоколебательных режимов.

Математическая модель объекта исследования

В качестве математической модели замкнутой автоматической системы с сухим трением и люфтом принято следующее описание:

$$\ddot{x} + g_1 \dot{x} = -d_1 n - d_2 n'; \quad n = n(n_-, n'); \quad n' = n'(n'_-, x), \quad (1)$$

где $x, \dot{x}, n', n$ – переменные; g_1, d_1, d_2 – положительные вещественные коэффициенты; $n = n(n_-, n')$, $n' = n'(n'_-, x)$ – существенные нелинейности, характеризующие учет в

модели сухого трения и люфта, соответственно, при этом n_- , n'_- – предыстория состояния нелинейностей; $\bullet \equiv d/dt$; t – время.

Существенные нелинейности, характеризующие учет в модели люфта и сухого трения имеют следующее аналитическое описание:

$$n' = \begin{cases} n'_-, & \text{если } |x - n'| \leq \varepsilon; \\ x - \varepsilon, & \text{если } x > n'_- + \varepsilon; \\ x + \varepsilon, & \text{если } x < n'_- - \varepsilon; \end{cases} \quad n = \begin{cases} 0, & \text{если } |n'| \leq h_1, \text{ или если } h_1 < |n'| < h \text{ и } n_- = 0; \\ n = n' - h_1 \text{Sign}(n_-), & \text{если } |n'| = h \text{ и } n_1 = 0 \text{ или} \\ & \text{если } |n'| > h_1 \text{ и } n_- \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

В описании (2) положительные параметры ε , h , h_1 характеризуют величину люфта, величину трения покоя и трения движения, соответственно, при этом $h \geq h_1 \geq 0$.

Математическая модель вида (1), (2) относится к кусочно-линейным динамическим моделям. В структурном виде модель (1), (2) представлена на рис. 1.

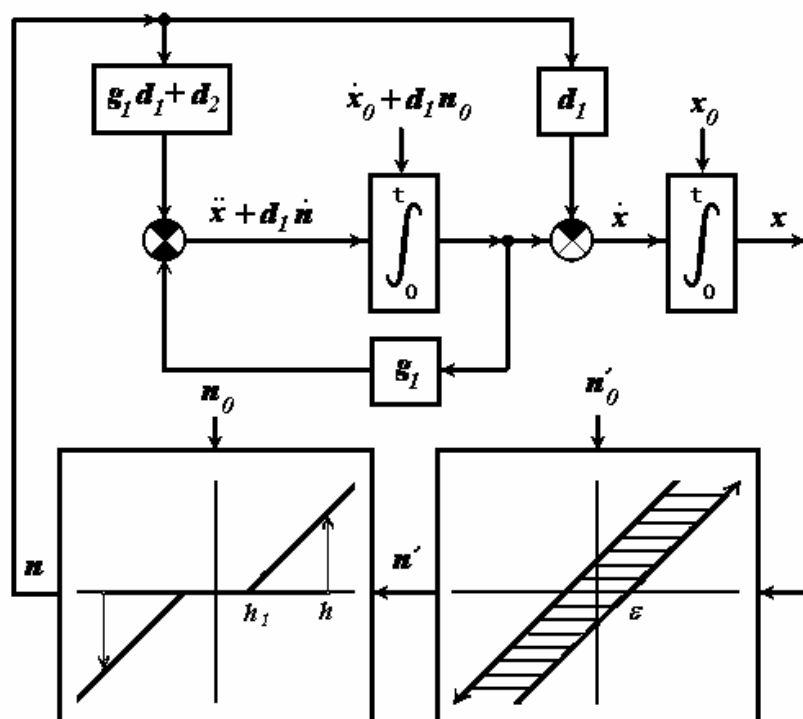


Рис. 1. Структура математической модели автоматической системы с люфтом и сухим трением

Ввиду неоднозначности нелинейных зависимостей начальные условия не могут определяться только x_0 , $\dot{x}_0$, необходимо задавать начальные значения n_0 , n'_0 .

Метод исследования

Для исследования был выбран метод точечных преобразований. Название метода определил академик А.А. Андронов в своем докладе «Теория точечных преобразований Пуанкаре – Брауэра – Биркгофа и теория нелинейных колебаний» [1]. Метод представляет собой строгий математический аппарат для решения принципиальных вопросов существования в фазовом пространстве (пространстве состояний) нелинейных динамических систем предельных циклов, выяснения их устойчивости (неустойчивости), объ-

яснения механизмов (условий) их возникновения и исчезновения (бифуркаций) [2]. Изучение фазовых пространств нелинейных систем методом точечных преобразований позволило решить ряд принципиальных задач теории автоматического регулирования [3].

Фазовым пространством рассматриваемой динамической системы (1), (2) является бесконечнолистная фазовая плоскость, отображающая совокупность всех возможных состояний рассматриваемой динамической системы. Каждому отдельно взятому состоянию системы соответствует «своя» изображающая точка на плоскости, непрерывному изменению состояний системы – движение изображающей точки вдоль фазовой траектории. В силу физического смысла параметра t (время) все фазовые траектории являются направленными интегральными кривыми, которые вместе с особыми точками (состояниями равновесия) и особыми траекториями (предельными циклами и сепаратрисами) качественно характеризуют динамическое поведение системы – определяют фазовый портрет системы.

Фазовой портрет системы может быть выяснен путем исследования точек пересечения фазовых траекторий с пересекающими их так называемыми линиями без контакта (секущими линиями).

Последовательность точек пересечений, осуществляемых в силу фазовых траекторий, с секущими линиями, образует некоторое точечное преобразование точек секущих линий друг в друга и в конечном итоге самих в себя в виде определенных непрерывных и однозначных функций, названных Пуанкаре функциями последования.

К изучению функций последования и сводится задача об исследовании структуры фазовой плоскости, которая однозначно определяется структурой порождаемого ею точечного преобразования, при этом предельным циклам будут соответствовать точки пересечения функций последования. Практический интерес представляет также определяемая с помощью функций последования структура разбиения пространства параметров на области качественно различного динамического поведения системы.

Примечание. Частный случай модели (1), (2) при $h = h_1 = 0$, что соответствовало учету только люфта, исследовался в работе [4]. Другой частный случай при $\varepsilon = 0$, что соответствовало учету в модели только сухого трения, исследовался в работах [5, 6]. Частный случай при $h = h_1 \neq 0$, что соответствовало учету в модели и люфта и сухого трения, однако при этом трение было учтено по простейшей его идеализации – кулоновской, был исследован в работе [7]. Модель (1), (2) в полном своем виде исследуется впервые.

Результаты исследования

В результате применения метода точечных отображений были получены (в параметрическом виде) функции последования $F_E(V)$, $F_E^*(V)$ и $\bar{F}_E(V_1)$, $\bar{F}_E^*(V_1)$ (представленные на рис. 2). Анализ функций показал, что их взаимное расположение ограничивается следующими случаями:

- 1) функции не имеют пересечений: $F_E(V) < F_E^*(V)$ и $\bar{F}_E(V_1) < \bar{F}_E^*(V_1)$ (представлено на рис. 2-а) – система (1), (2) глобально устойчива (устойчива «в целом»);
- 2) функции $\bar{F}_E(V_1)$, $\bar{F}_E^*(V_1)$ имеют одно пересечение, при этом $F_E(V) < F_E^*(V)$ (представлено на рис. 2-б) – на фазовой плоскости системы (1), (2) имеется устойчивый предельный цикла, проходящий через концы отрезка равновесия, чему соответствует существование автоколебаний «мягкого режима появления»;
- 3) функции $F_E(V)$, $F_E^*(V)$ имеют два пересечения, при этом $\bar{F}_E(V_1) < \bar{F}_E^*(V_1)$ (представлено на рис. 2-в) – на фазовой плоскости системы (1), (2) существуют два пре-

дельных цикла, охватывающие отрезок равновесия (наружный – устойчивый, внутренний – неустойчивый), чему соответствуют автоколебания «жесткого режима появления»;

- 4) функции $F_E(V)$, $F_E^*(V)$ имеют одно пересечение, при этом $\bar{F}_E(V_1) > \bar{F}_E^*(V_1)$ (представлено на рис. 2-г) – на фазовой плоскости существуют один предельный цикл, охватывающий отрезок равновесия, чему соответствуют автоколебания «мягкого режима»;
- 5) функции $F_E(V)$, $F_E^*(V)$ имеют два пересечения, а $\bar{F}_E(V_1)$, $\bar{F}_E^*(V_1)$ – одно пересечение (представлено на рис. 2-д) – на фазовой плоскости существуют три предельных цикла (два устойчивых, разделенные неустойчивым), чему соответствует существование автоколебаний как «мягкого режима» (устойчивый предельный цикл, проходящий через концы отрезка равновесия) так и «жесткого режима» (устойчивый предельный цикл, охватывающий отрезок состояний равновесия).

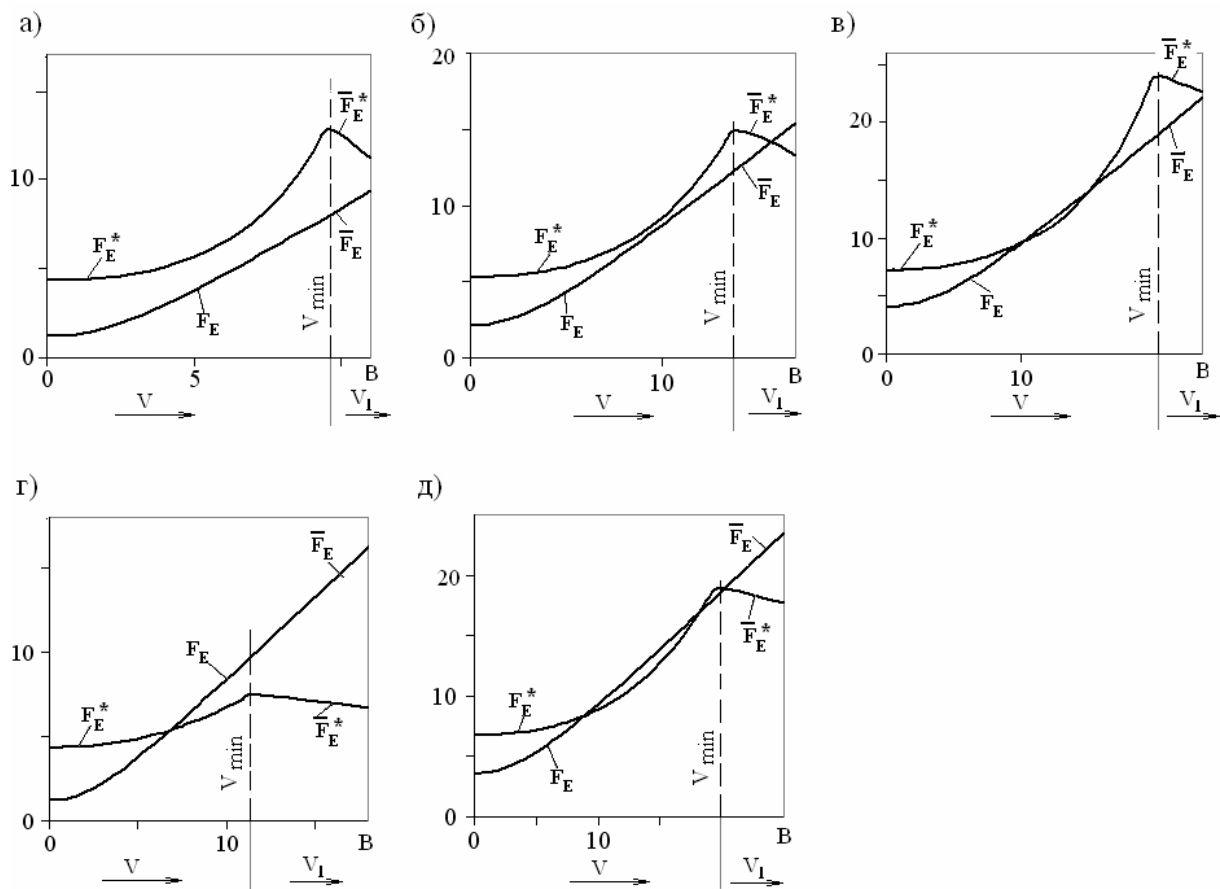


Рис. 2. Взаимное расположение функций последования при $h/h_1 = 8/9$, $\varepsilon = 1/2$

Граничную поверхность (представлено на рис. 3), отделяющую в пространстве коэффициентов системы (1), (2) область устойчивости «в целом» (глобальная устойчивость) от области существования автоколебаний различных режимов можно получить из условий

$$\bar{F}_E(B) = \bar{F}_E^*(B), F_E(V) = F_E^*(V) \text{ и } \frac{dF_E}{dV} = \frac{dF_E^*}{dV}, \quad (3)$$

где $B = \frac{d_2}{|\alpha|g_1} > 0$, α – вещественная часть корня характеристического уравнения $p^2 + (g_1 + d_1)p + d_2 = 0$; V, V_1 – параметры, определяемые координатами секущих линий. Первое уравнение в (3) соответствует пересечению $\bar{F}_E(V_1), \bar{F}_E^*(V_1)$ при $V_1 = B$ и определяет появление устойчивого предельного цикла из концов отрезка равновесия (представлено на рис. 4-а), второе соответствует касанию графиков функций $F_E(V), F_E^*(V)$ и определяет появление двух предельных циклов (устойчивого и неустойчивого), охватывающих отрезок состояний равновесия (представлено на рис. 4-б).

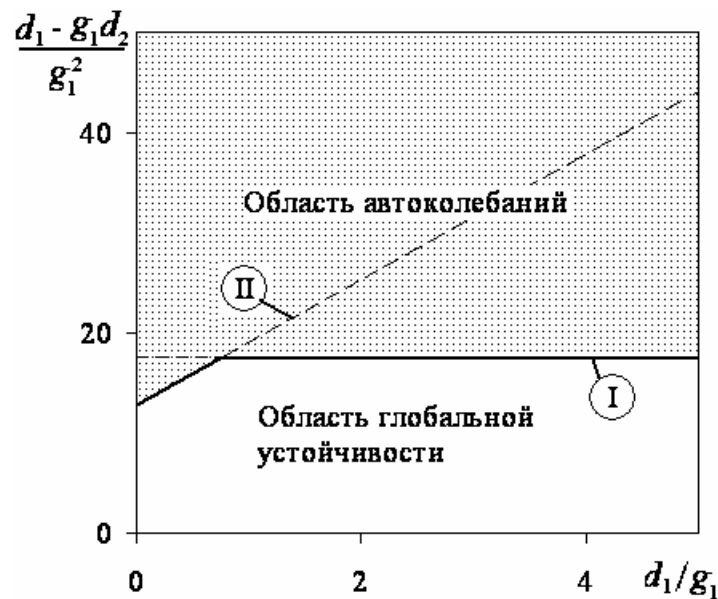


Рис. 3. Структура разбиения пространства параметров при $h/h_1 = 8/9$, $\varepsilon = 1/2$

На рис. 4 представлено взаимное расположение графиков функций последования для граничных линий, разделяющих область глобальной устойчивости и область автоколебаний при $h/h_1 = 8/9$, $\varepsilon = 1/2$.

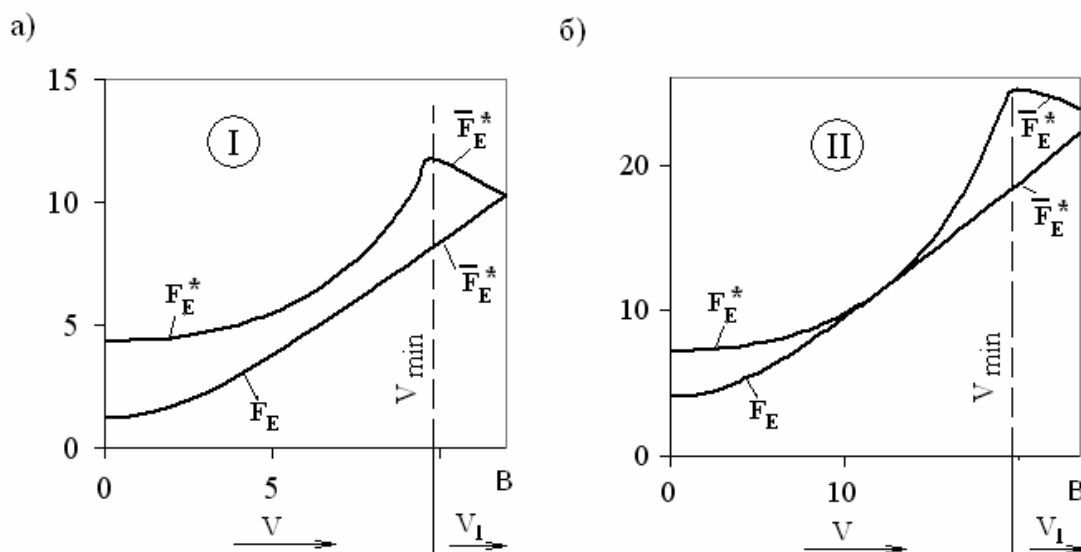


Рис. 4. Взаимное расположение функций последования на граничных линиях

Заключение

Проведенное исследование показало, что наличие в замкнутой автоматической системе таких естественных нелинейностей, как люфт и сухое трение, может вызвать автоколебания в системе. Полностью избавиться от нелинейностей практически невозможно, уменьшение их количественных значений связано с большими материальными расходами и трудностями технического характера.

Однако при правильном выборе параметров системы (из области глобальной устойчивости) автоколебания никогда не возникнут, и, если значения нелинейностей удовлетворяют требованиям точности, то с их присутствием можно мириться.

Литература

1. Андронов А.А. Теория точечных преобразований Пуанкаре–Брауэра–Биркгофа и теория нелинейных колебаний. // Вестн. АН СССР. 1946. № 6. С. 176.
2. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.
3. Гаушус Э.В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований. / М.: Наука, 1976. 368 с.
4. Андронов А.А. Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе. // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 1. С. 15–41.
5. Шамберов В.Н. Исследование типовой промышленной системы автоматического регулирования с некулоновой моделью сухого трения. // Автореф. дис. канд. техн. наук. Л.: ЛГУ, 1988. 18 с.
6. Нгуен Чунг Киен, Шамберов В.Н. Влияние сухого трения в исполнительных механизмах с приводными электродвигателями на возникновение автоколебаний. // Доклады 16-й межвузовской научно-технической конференции. Петродворец: ВМИРЭ им. А.С/ Попова. 2005. №16. С. 271–273.
7. Нелепин Р.А. Динамика непрямого регулирования с переменной скоростью сервомотора при учете кулонова трения в золотнике и сервомоторе. // Автоматическое управление и вычислительная техника: Сб. научн. тр. М.: Машгиз, 1961. Вып. 4. С. 355–383.