УДК 621.762.53

Р. Д. Баширов

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В СТЕНКЕ ВТУЛКИ ЦИЛИНДРА ПРИ ЦЕНТРОБЕЖНОМ ИНДУКЦИОННОМ НАПЕКАНИИ

При проведении индукционного напекания нами экспериментальным путем определено распределение температуры по диаметрам и по длине втулки, а также найдена рациональная температурно-временная область [1]. Большой интерес представляет моделирование распределения температуры в стенке втулки цилиндра при центробежном индукционном напекании (ЦИН) в зависимости от времени напекания, а также с учетом геометрических параметров втулки, теплоотдачи, теплопроводности, материала втулки, температуры окружающей среды и т. д.

С учетом этих параметров нами аналитически решена задача по моделированию температуры в стенке втулки цилиндра при ЦИН.

Пусть начальное распределение температуры задано в виде $T = 0$. Считаем, что начиная с некоторого момента $t = 0$ внутренняя поверхность втулки цилиндра за счет температуры напекания приобретает постоянную температуру T_0, т. е. полагаем, что внутренняя поверхность втулки цилиндра при $r = r_1$ приобретает температуру T_0 внезапно.

Краевая задача теории теплопроводности о распределении температурного поля в стенке втулки цилиндра запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right),\ r_1 < r < r_2\ , \tag{1}$$

$$T = T_0 \text{ при } r = r_1,\ \ t > 0; \tag{2}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_*\left(T - T_c\right) = 0 \text{ при } r = r_2,\ \ t > 0, \tag{3}$$

$$T = 0 \text{ при } t = 0 \quad r_1 < r < r_2\ .$$

Здесь $T(t, r)$ – температурная функция; α_* – коэффициент теплоотдачи; α – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности материала втулки; T_c – температура окружающей среды, которую без нарушения общности можно считать равной нулю.

Для решения краевой задачи (1)–(3) используем преобразование Лапласа. Применим преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению (1) с граничным и начальным условиями (2)–(3).

Таким образом, преобразование Лапласа свело дифференциальное уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\overline{T}}{dr^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{d\overline{T}}{dr} - q^2\overline{T} = 0\ ,\ r_1 < r < r_2\ , \qquad (4)$$

где $q = \frac{p}{a}$.

Граничные условия для изображения функции примут вид:

$$\overline{T} = \frac{T_0}{P} \quad \text{при } r = r_1;$$

$$\lambda\frac{d\overline{T}}{dr} + \alpha_*\overline{T} = 0 \quad \text{при } r = r_2. \qquad (5)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка. Решение (4) можно записать в следующей форме:

$$\overline{T} = AI_0(qr) + BK_0(qr), \qquad (6)$$

где $I_0(qr)$ и $K_0(qr)$ – функции Бесселя мнимого аргумента.

Постоянные A и B выбираются так, чтобы $\overline{T}$ удовлетворяло условиям (5).

Подставляя их в решение (6), получим:

$$AI_0(qr_1) + BK_0(qr_1) = \frac{T_0}{P}\ ; \qquad (7)$$

$$q\left[AI_1(qr_2) - BK_1(qr_2)\right] + \frac{\alpha_*}{\lambda}\left[AI_0(qr_2) + BK_0(qr_2)\right] = 0\ .$$

Решая полученную систему двух уравнений относительно A и B, окончательно получим:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad B = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ ;$$

$$\Delta_1 = \frac{T_0}{P}\left[\frac{\alpha_*}{\lambda}K_0(qr_2) - qK_1(qr_2)\right]\ ;$$

$$\Delta_2 = \frac{T_0}{P}\left[qI_1(qr_2) + \frac{\alpha_*}{\lambda}I_0(qr_2)\right]\ ; \qquad (8)$$

$$\Delta = I_0(qr_1)\left[\frac{\alpha_*}{\lambda}K_0(qr_2) - qK_1(qr_2)\right] -$$

$$- K_0(qr_1)\left[qI_1(qr_2) + \frac{\alpha_*}{\lambda}I_0(qr_2)\right].$$

Теперь, чтобы найти температурную функцию T, надо использовать теорему обращения. Согласно этой теореме

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\varepsilon t}\overline{T}(\varepsilon)\, d\varepsilon \ ,$$

где γ должна быть настолько большой величиной, чтобы все особые точки функции $\overline{T}(\varepsilon)$ лежали слева от линии ($\gamma - i\infty$, $\gamma + i\infty$).

Подынтегральная функция является однозначной функцией от ε с простым полюсом при $\varepsilon = 0$ и простыми полюсами при $\varepsilon = -a\alpha_n^2$, где $\pm\alpha_n$ – корни уравнения

$$Y_0(\alpha r_1)\left[\alpha J_1(\alpha r_2) - \frac{\alpha_*}{\lambda} J_0(\alpha r_2)\right] - J_0(\alpha r_1)\left[\alpha Y_1(\alpha r_2) - \frac{\alpha_*}{\lambda} Y_0(\alpha r_2)\right] = 0 . \qquad (9)$$

Корни уравнения (9) действительные и простые. Не останавливаясь на нахождении вычетов подынтегральной функции в полюсах, приведем окончательную формулу для температурной функции:

$$T(r_1 t) = \frac{T_0 r_1 [\lambda - \alpha_* r_2 \ln(r/r_2)]}{\lambda r_1 + \alpha_* r_1 r_2 \ln(r_2/r_1)} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\alpha_n^2 t} \times$$

$$\times \frac{T_0 F_1(r_1\alpha_n)}{F(\alpha_n)} \{\lambda\alpha_n J_1(r_2\alpha_n) - \alpha_* J_0(r_2\alpha_n)\}^2 . \qquad (10)$$

Здесь α_n – корни уравнения (9).

$$\begin{aligned} F(\alpha_n) &= (\lambda^2\alpha_n^2 + \alpha_*^2)[J_0(r_1\alpha_n)]^2 - [\lambda\alpha_n J_1(r_2\alpha_n) - \alpha_* J_0(r_2\alpha_n)]^2; \\ F_1(r_1\alpha_n) &= -J_0(r\alpha_n) Y_0(r_1\alpha_n) + Y_0(r\alpha_n) J_o(r_1\alpha_n). \end{aligned} \qquad (11)$$

Полученные формулы (10) и (11) дают возможность определить распределения температуры в стенки втулки цилиндра при индекционном центробежном напекании. Задаваясь числовыми значениями параметров центробежного индукционного напекания, по вышеуказанным формулам можно определить распределение температуры в стенке втулки цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баширов Р. Д.* Определение оптимальной температурно-временной области при индукционном напекании втулки цилиндра // Проблемы безопасности морского судоходства, технической и коммерческой эксплуатации морского транспорта: Материалы третьей регион. науч.-техн. конф. / НГМА. – Новороссийск, 2002. – С. 150–153.