УДК 621.762.53

Р. Д. Баширов

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В СТЕНКЕ ВТУЛКИ ЦИЛИНДРА ПРИ ЦЕНТРОБЕЖНОМ ИНДУКЦИОННОМ НАПЕКАНИИ

При проведении индукционного напекания нами экспериментальным путем определено распределение температуры по диаметрам и по длине втулки, а также найдена рациональная температурно-временная область [1]. Большой интерес представляет моделирование распределения температуры в стенке втулки цилиндра при центробежном индукционном напекании (ЦИН) в зависимости от времени напекания, а также с учетом геометрических параметров втулки, теплоотдачи, теплопроводности, материала втулки, температуры окружающей среды и т. д.

С учетом этих параметров нами аналитически решена задача по моделированию температуры в стенке втулки цилиндра при ЦИН.

Пусть начальное распределение температуры задано в виде $T = 0$. Считаем, что начиная с некоторого момента $t = 0$ внутренняя поверхность втулки цилиндра за счет температуры напекания приобретает постоянную температуру T_0, т. е. полагаем, что внутренняя поверхность втулки цилиндра при $r = r_1$ приобретает температуру T_0 внезапно.

Краевая задача теории теплопроводности о распределении температурного поля в стенке втулки цилиндра запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right), \; r_1 < r < r_2 , \tag{1}$$

$$T = T_0 \text{ при } r = r_1 , \quad t > 0; \tag{2}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_* \left(T - T_c \right) = 0 \text{ при } r = r_2 , \quad t > 0, \tag{3}$$

$$T = 0 \text{ при } t = 0 \quad r_1 < r < r_2 .$$

Здесь $T(t, r)$ – температурная функция; α_* – коэффициент теплоотдачи; α – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности материала втулки; T_c – температура окружающей среды, которую без нарушения общности можно считать равной нулю.

Для решения краевой задачи (1)–(3) используем преобразование Лапласа. Применим преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению (1) с граничным и начальным условиями (2)–(3).

Таким образом, преобразование Лапласа свело дифференциальное уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\overline{T}}{dr^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{d\overline{T}}{dr}-q^2\overline{T}=0\ ,\ r_1<r<r_2\ , \qquad (4)$$

где $q=\frac{p}{a}$.

Граничные условия для изображения функции примут вид:

$$\overline{T}=\frac{T_0}{P} \quad \text{при } r=r_1;$$

$$\lambda\frac{d\overline{T}}{dr}+\alpha_*\overline{T}=0 \quad \text{при } r=r_2. \qquad (5)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка. Решение (4) можно записать в следующей форме:

$$\overline{T}=AI_0(qr)+BK_0(qr), \qquad (6)$$

где $I_0(qr)$ и $K_0(qr)$ – функции Бесселя мнимого аргумента.

Постоянные A и B выбираются так, чтобы $\overline{T}$ удовлетворяло условиям (5).

Подставляя их в решение (6), получим:

$$AI_0(qr_1)+BK_0(qr_1)=\frac{T_0}{P}; \qquad (7)$$

$$q\left[AI_1(qr_2)-BK_1(qr_2)\right]+\frac{\alpha_*}{\lambda}\left[AI_0(qr_2)+BK_0(qr_2)\right]=0\ .$$

Решая полученную систему двух уравнений относительно A и B, окончательно получим:

$$A=\frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad B=\frac{\Delta_2}{\Delta};$$

$$\Delta_1=\frac{T_0}{P}\left[\frac{\alpha_*}{\lambda}K_0(qr_2)-qK_1(qr_2)\right];$$

$$\Delta_2=\frac{T_0}{P}\left[qI_1(qr_2)+\frac{\alpha_*}{\lambda}I_0(qr_2)\right]; \qquad (8)$$

$$\Delta=I_0(qr_1)\left[\frac{\alpha_*}{\lambda}K_0(qr_2)-qK_1(qr_2)\right]-$$

$$-K_0(qr_1)\left[qI_1(qr_2)+\frac{\alpha_*}{\lambda}I_0(qr_2)\right].$$

Теперь, чтобы найти температурную функцию T, надо использовать теорему обращения. Согласно этой теореме

$$T(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\varepsilon t}\overline{T}(\varepsilon)\,d\varepsilon\ ,$$

где γ должна быть настолько большой величиной, чтобы все особые точки функции $\overline{T}(\varepsilon)$ лежали слева от линии (γ – *i*∞, γ + *i*∞).

Подынтегральная функция является однозначной функцией от ε с простым полюсом при ε = 0 и простыми полюсами при $\varepsilon=-a\alpha_n^2$, где $\pm\alpha_n$ – корни уравнения

$$Y_0(\alpha r_1)\left[\alpha J_1(\alpha r_2)-\frac{\alpha_*}{\lambda}J_0(\alpha r_2)\right]-J_0(\alpha r_1)\left[\alpha Y_1(\alpha r_2)-\frac{\alpha_*}{\lambda}Y_0(\alpha r_2)\right]=0\,. \qquad (9)$$

Корни уравнения (9) действительные и простые. Не останавливаясь на нахождении вычетов подынтегральной функции в полюсах, приведем окончательную формулу для температурной функции:

$$T(r_1 t)=\frac{T_0 r_1[\lambda-\alpha_* r_2\ln(r/r_2)]}{\lambda r_1+\alpha_* r_1 r_2\ln(r_2/r_1)}-\pi\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a\alpha_n^2 t}\times$$

$$\times\frac{T_0F_1(r_1\alpha_n)}{F(\alpha_n)}\{\lambda\alpha_n J_1(r_2\alpha_n)-\alpha_* J_0(r_2\alpha_n)\}^2. \qquad (10)$$

Здесь α_n – корни уравнения (9).

$$F(\alpha_n)=\left(\lambda^2\alpha_n{}^2+\alpha_*{}^2\right)[J_0(r_1\alpha_n)]^2-[\lambda\alpha_n J_1(r_2\alpha_n)-\alpha_* J_0(r_2\alpha_n)]^2;$$
$$F_1(r_1\alpha_n)=-J_0(r\alpha_n)Y_0(r_1\alpha_n)+Y_0(r\alpha_n)J_o(r_1\alpha_n). \qquad (11)$$

Полученные формулы (10) и (11) дают возможность определить распределения температуры в стенки втулки цилиндра при индекционном центробежном напекании. Задаваясь числовыми значениями параметров центробежного индукционного напекания, по вышеуказанным формулам можно определить распределение температуры в стенке втулки цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баширов Р. Д.* Определение оптимальной температурно-временной области при индукционном напекании втулки цилиндра // Проблемы безопасности морского судоходства, технической и коммерческой эксплуатации морского транспорта: Материалы третьей регион. науч.-техн. конф. / НГМА. – Новороссийск, 2002. – С. 150–153.