

И. Р. Добровинский, Е. А. Ломтев,  
Ю. Т. Медведик, П. М. Стеблев, А. А. Трофимов

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРАФОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СХЕМ УЗЛОВ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЯХ И АНАЛИЗА ИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

*Аннотация.* Предложен метод расчета операционных усилителей на основе использования топологических графов, что позволяет резко сократить объем вычислений за счет перехода от принципиальных электрических схем узлов средств измерений непосредственно к графам и к функциям преобразования.

*Ключевые слова:* операционный усилитель, топологический граф, коэффициент усиления, исток, сток.

*Abstract.* The article introduces a method of calculating operational amplifiers based on the use of topological graphs. Application of the method allows to drastically reduce the amount of computation due to transition from principal electrical circuit units of measurement tools directly to graphs and functions of the transformation.

*Key words:* operational amplifier, topological graph, gain, source, drain.

### Введение

Расчет узлов средств измерений на операционных усилителях (ОУ) с реальными характеристиками связан с решением систем уравнений высокого порядка. Электрической схемой замещения ОУ является трехполюсник, который описывается системой трех уравнений. Измерительный усилитель, использующий три ОУ, описывается системой девяти уравнений, и ее решение представляет весьма сложную задачу. Использование топологических графов позволяет во много раз упростить решение данных задач при переходе от принципиальной электрической схемы непосредственно к топологическому графу, на основании которого можно получить функцию передачи усилителя, его входное и выходное сопротивления.

### 1. Применение формулы Мезона для определения значения коэффициента передачи инвертирующего ОУ

На рис. 1,а представлена электрическая схема инвертирующего ОУ, а на рис. 1,б – соответствующий топологический граф, который является графическим изображением системы линейных уравнений (1).

Топологический граф содержит исток – источник входного напряжения  $U_{\text{вх}}$ , зависимые узлы 1 и 2, соответствующие напряжениям на инвертирующем  $e^-$  и неинвертирующем  $e^+$  входах ОУ и сток – узел 3. Потенциалу стока соответствует напряжение на выходе усилителя  $U_{\text{вых}}$ .

Работа инвертирующего усилителя описывается соотношениями:

$$\begin{cases} e^+ = e^- g_{\text{вх}} (g_{22})^{-1}; \\ e^- = U_{\text{вх}} g_1 (g_{11})^{-1} + e^+ g_{\text{вх}} (g_{11})^{-1} + U_{\text{вых}} g_2 (g_{11})^{-1}; \\ U_{\text{вых}} = -ke^- + ke^+, \end{cases} \quad (1)$$

где  $g_{11}$  и  $g_{22}$  – собственные проводимости узлов 1 и 2, равные сумме проводимостей всех ветвей, сходящихся соответственно в этих узлах:

$$g_{11} = g_1 + g_2 + g_{\text{вх}}; g_{22} = g_3 + g_{\text{вх}},$$

причем проводимость  $g_i = (R_i)^{-1}$  при  $i = 1, 2, 3$ ;  $k$  – коэффициент усиления ОУ.

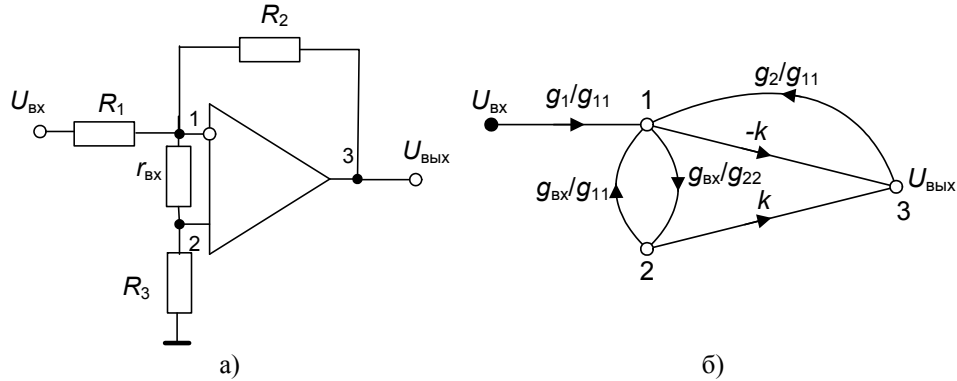


Рис. 1. Схема и топологический граф операционного усилителя:  
 $R_1, R_2, R_3$  – навесные резисторы;  $r_{\text{вх}}$  – дифференциальное входное сопротивление ОУ;  $k$  – реальное значение коэффициента усиления ОУ;  
 $U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}$  – напряжения на входе и выходе ОУ соответственно

Первые два уравнения системы составлены по законам Кирхгофа в соответствии с методом узловых потенциалов. Третьему уравнению соответствуют односторонние передачи входных сигналов  $e^+$  и  $e^-$  дифференциального усилителя на его выход.

Коэффициент передачи реального ОУ определим по топологическому графу (рис. 1,б) с учетом реальных значений входного сопротивления ОУ –  $r_{\text{вх}}$  и коэффициента усиления дифференциального входного сигнала  $k$ :

$$G_{\text{иу}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{1 - (L_1 + L_2 + L_3)}, \quad (2)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  – пути от истока  $U_{\text{вх}}$  к стоку  $U_{\text{вых}}$ ;  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – алгебраические дополнения соответствующих путей;  $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$  – определитель данного графа.

В топологическом графе коэффициенты передачи двухузловых контуров  $L_1, L_2$  и трехузловых контура  $L_3$  равны произведениям коэффициентов передач входящих в них ветвей:

$$L_1 = \frac{g_{\text{вх}}^2}{g_{11}g_{22}}; L_2 = \frac{-kg_2}{g_{11}}; L_3 = \frac{kg_2g_{\text{вх}}}{g_{11}g_{22}}.$$

Коэффициенты передач путей  $P_1$  и  $P_2$  равны [1]

$$P_1 = U_{\text{вх}} \frac{g_1}{g_{22}} (-k); P_2 = U_{\text{вх}} \frac{g_1}{g_{11}} \frac{g_{\text{вх}}}{g_{22}} k,$$

а алгебраические дополнения коэффициентов передач путей  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ , так как в топологическом графе нет контуров, не касающихся путей  $P_1$  и  $P_2$ .

Подставляя в (2) выражения для коэффициентов передачи путей и контуров, получим коэффициент передачи реального ОУ:

$$G_{\text{иу(реал)}} = \frac{-kg_1(g_{22})^{-1} \left[ 1 - g_{\text{вх}}(g_{22})^{-1} \right]}{1 - \frac{g_{\text{вх}}^2}{g_{11}g_{22}} + \frac{kg_2}{g_{11}} \left[ 1 - g_{\text{вх}}(g_{22})^{-1} \right]}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражения для коэффициентов передачи  $g_{11}$  и  $g_{22}$ , после преобразований получим значение коэффициента передачи реального ОУ:

$$G_{\text{иу(реал)}} = \frac{-kg_1g_3}{kg_2g_3 + (g_1 + g_2 + g_3)g_{\text{вх}} + (g_1 + g_2)g_3}. \quad (4)$$

Для идеального инвертирующего ОУ с учетом того, что  $k \rightarrow \infty$ ,  $g_{\text{вх}} \rightarrow 0$ , после упрощений получим

$$G_{\text{иу(ид)}} = -\frac{g_1}{g_2} = -\frac{R_2}{R_1}. \quad (5)$$

## 2. Применение формулы Мезона для определения значения коэффициента передачи неинвертирующего ОУ

На рис. 2,а представлен неинвертирующий операционный усилитель ОУ, а на рис. 2,б – соответствующий ему топологический граф.

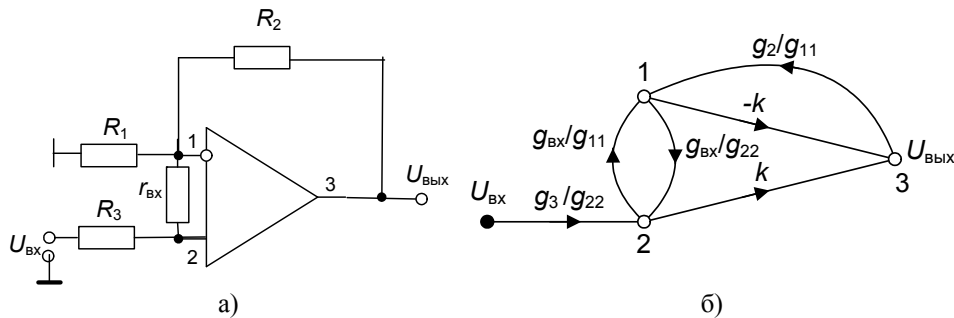


Рис. 2. Схема и граф неинвертирующего операционного усилителя

Топологическому графу соответствует система линейных уравнений:

$$\begin{cases} e^- = e^+ \frac{g_{\text{вх}}}{g_{11}} + U_{\text{вых}} \frac{g_2}{g_{11}}; \\ e^+ = e^- \frac{g_{\text{вх}}}{g_{22}} + U_{\text{вх}} \frac{g_3}{g_{22}}; \\ U_{\text{вых}} = -ke^- + ke^+. \end{cases} \quad (6)$$

Из топологического графа (рис. 2,б) определим коэффициент передачи реального неинвертирующего ОУ:

$$G_{\text{ну(реал)}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{g_3}{g_{22}} k \left( 1 - \frac{g_{\text{ВХ}}}{g_{11}} \right)}{1 + \frac{kg_2}{g_{11}} - \frac{kg_2 g_{\text{ВХ}}}{g_{11} g_{22}} - \frac{g_{\text{ВХ}}^2}{g_{11} g_{22}}}, \quad (7)$$

здесь  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ , а определитель данного графа  $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$ , где коэффициенты передач контуров равны:

$$L_1 = -\frac{kg_2}{g_{11}}; L_2 = \frac{kg_2 g_{\text{ВХ}}}{g_{11} g_{22}}; L_3 = -\frac{g_{\text{ВХ}}^2}{g_{11} g_{22}}.$$

Для идеального неинвертирующего ОУ с учетом того, что  $k \rightarrow \infty$ ,  $g_{\text{ВХ}} \rightarrow 0$  после ряда упрощений получим [2]

$$G_{\text{ну(ид)}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{g_{11}}{g_2} = \frac{g_1 + g_2}{g_2} = 1 + \frac{g_1}{g_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1}. \quad (8)$$

при  $k \rightarrow \infty$   
 $g_{\text{ВХ}} \rightarrow 0$

При необходимости большого усиления инвертирующего и неинвертирующего усилителей в цепи обратной связи используются резисторы с высоким значением номиналов. Это приводит к увеличению влияния помех и наводок. Данный недостаток можно исключить использованием инвертирующих или неинвертирующих ОУ с Т-образной обратной связью.

### 3. Применение формулы Мезона для определения значения коэффициента передачи неинвертирующего и инвертирующего ОУ с Т-образной обратной связью

На рис. 3 представлены неинвертирующий ОУ с Т-образной обратной связью и его топологический граф соответственно.

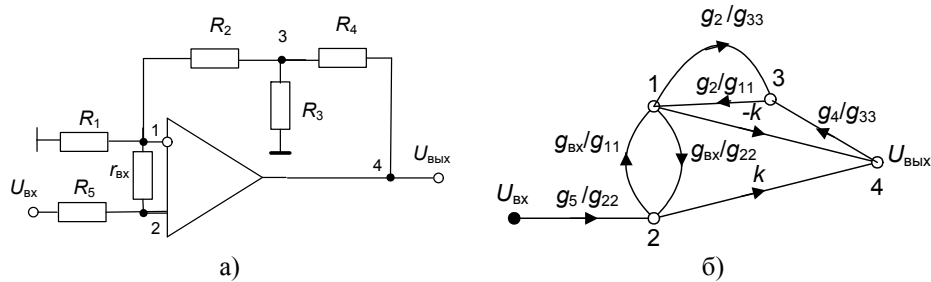


Рис. 3. Неинвертирующий операционный усилитель с Т-образной обратной связью и его граф:  $g_{11}, g_{22}, g_{33}$  – собственные проводимости узлов 1, 2, 3, значения которых равны  $g_{11} = g_1 + g_2 + g_{\text{ВХ}}$ ;  $g_{22} = g_5 + g_{\text{ВХ}}$ ;  $g_{33} = g_2 + g_3 + g_4$ , проводимость  $g_i = (R_i)^{-1}$

Из рис. 3,б получим следующую формулу Мэсона [1] для топологического графа:

$$G_{\text{ну(реал)}} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)}. \quad (9)$$

Здесь  $\Delta_1 = 1 - L_4$ ,  $\Delta_2 = 1$ . Определитель топологического графа будет равен  $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$ , где коэффициенты передачи четырехузлового контура  $L_2 = k \frac{g_2 g_4 g_{BX}}{g_{11} g_{33} g_{22}}$ , трехузлового контура  $L_1 = -k \frac{g_2 g_4}{g_{11} g_{33}}$ , двухузловых контуров  $L_3 = \frac{g_{BX}^2}{g_{11} g_{22}}$  и  $L_4 = \frac{g_2^2}{g_{11} g_{33}}$ , а коэффициенты передачи путей  $P_1 = k \frac{g_5}{g_{22}}$ ,  $P_2 = \frac{g_5 g_{BX}}{g_{22} g_{11}}(-k)$ . Подставляя выражения для коэффициентов передач путей, алгебраических дополнений и контуров в (9), получим выражение для коэффициента передачи реального неинвертирующего ОУ с Т-образной обратной связью:

$$G_{\text{ну(реал)}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{\frac{g_5}{g_{22}} k \left( 1 - \frac{g_2^2}{g_{11} g_{33}} \right) + \frac{g_5}{g_{22}} \frac{g_{BX}}{g_{11}} (-k)}{1 + k \frac{g_2 g_4}{g_{11} g_{33}} \left( 1 - \frac{g_{BX}}{g_{22}} \right) - \frac{g_2^2}{g_{11} g_{33}} - \frac{g_{BX}^2}{g_{11} g_{22}}}. \quad (10)$$

Для идеального неинвертирующего усилителя, полагая, что  $k \rightarrow \infty$ ,  $g_{BX} \rightarrow 0$ , после ряда упрощений получим [2]:

$$G_{\text{ну(ид)}} = 1 + \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = 1 + \frac{R_2 + R_4 + R_2 R_4 (R_3)^{-1}}{R_1} + \frac{R_4}{R_3}. \quad (11)$$

На рис. 4 представлены инвертирующий ОУ с Т-образной обратной связью и его топологический граф соответственно.

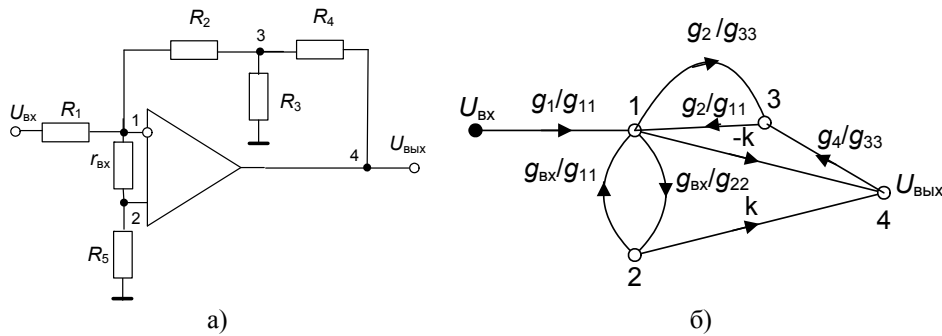


Рис. 4. Инвертирующий ОУ с Т-образной обратной связью и его граф

Определим реальный и идеальный коэффициенты передачи инвертирующего ОУ с Т-образной обратной связью (рис. 4). Исходя из топологического графа ОУ (рис. 4,б), получим реальный коэффициент передачи:

$$G_{\text{ин(реал)}} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{-k \frac{g_1}{g_{11}} + k \frac{g_1 g_{\text{ВХ}}}{g_{11} g_{22}}}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)}, \quad (12)$$

где  $P_1, P_2$  – коэффициенты передачи путей, алгебраические дополнения которых  $\Delta_1, \Delta_2$  и  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ , так как отсутствуют контуры, не касающиеся данных путей.

Для идеального инвертирующего усилителя, полагая, что  $k \rightarrow \infty$ ,  $g_{вх} \rightarrow 0$ , получим

$$G_{\text{ну(ид)}} = -\frac{g_1 g_{33}}{g_2 g_4} = -\left(\frac{g_1}{g_4} + \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1 g_3}{g_4 g_2}\right) = -\frac{R_4 + R_2 + \frac{R_2 R_4}{R_3}}{R_1}. \quad (13)$$

#### 4. Анализ погрешностей коэффициента передачи ОУ

Важнейшим параметром средства измерения (СИ) является его передаточная функция. Она выражается через параметры основных узлов СИ как отношение выходной величины к входной. Используя теорию сигнальных графов, можно формализовать и упростить процедуру получения функции преобразования и анализа погрешностей СИ [2]. Передаточная функция характеризуется как передача графа  $G = f(g_i)$ , где  $G$  – коэффициент передачи графа;  $g_i$  – коэффициент передачи  $i$ -й ветви графа ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ),  $f$  – функция преобразования [1].

Определим влияние неустойчивости  $i$ -й ветви графа на неустойчивость коэффициента передачи графа:

$$\delta G_{\delta g_i} = \frac{\partial G}{\partial g_i} \frac{\Delta g_i}{G} = \frac{\partial G}{\partial g_i} \frac{g_i}{G} \frac{\Delta g_i}{g_i} = S_{gi} \delta g_i, \quad (14)$$

где  $S_{gi}$  – весовой коэффициент  $i$ -й ветви, показывающий, с каким весом учитывается ее относительная погрешность в общей погрешности передачи графа  $\delta G$ .

Так как относительная погрешность коэффициента передачи  $i$ -й ветви графа  $\delta g_i$ , то весовой коэффициент погрешности передачи ветви равен

$$S_{gi} = \frac{\partial G}{\partial g_i} \frac{g_i}{G}. \quad (15)$$

Для блоков и узлов средств измерений уравнение связи параметров имеет вид дробно-линейной функции

$$G = (ag_i + b)(cg_i + d)^{-1}. \quad (16)$$

Проделив необходимые преобразования над уравнением связи параметров в соответствии с выражением (14), получим выражения  $S_{gi}$  для дробно-линейной функции передачи графа:

$$S_{gi} = (ad - bc) g_i [(ag_i + b)(cg_i + d)]^{-1}. \quad (17)$$

Из общего выражения для весового коэффициента погрешности передачи  $\delta g_i$ -ветви графа получим значения для часто встречающихся частных случаев, получаемых при равенстве нулю одного из коэффициентов в передаче графа (17):

$$- \text{если } a = 0, \text{ то } G = b(cg_i + d)^{-1}, \text{ а } S_{gi} = -(1 + d/cg_i)^{-1}; \quad (18)$$

$$- \text{если } b = 0, \text{ то } G = ag_i(cg_i + d)^{-1}, \text{ а } S_{gi} = (1 + cg_i/d)^{-1}; \quad (19)$$

$$- \text{если } c = 0, \text{ то } G = (ag_i + b)(d)^{-1}, \text{ а } S_{gi} = (1 + b/ag_i)^{-1}; \quad (20)$$

$$- \text{если } d = 0, \text{ то } G = (ag_i + b)(cg_i)^{-1}, \text{ а } S_{gi} = -(1 + ag_i/b)^{-1}; \quad (21)$$

$$- \text{если } b = 0 \text{ и } d = 0, \text{ то } S_{gi} = 1; \quad (22)$$

$$- \text{если } a = 0 \text{ и } c = 0, \text{ то } S_{gi} = -1. \quad (23)$$

Использование формулы Мэсона резко упрощает процедуру нахождения функции передачи графа. Данная методика универсальна в смысле применения системного подхода, т.е. последовательного ее применения к информационно-измерительным системам и комплексам, к структурам средств измерений, к блокам и узлам этих структур и, наконец, к отдельным элементам блоков и узлов. Удобным в расчетах является использование расширенных графов. В них узлы, являющиеся независимыми источниками входного, опорного, компенсирующего или пилообразного напряжений, напряжения смещения представляются ветвями расширенного графа. Так как они входят в коэффициент передачи графа, то их нестабильности влияют на его нестабильность. Данное обстоятельство позволяет выделить аддитивную погрешность как нестабильность независимых источников и мультипликативную составляющую общей погрешности измерения как нестабильности коэффициентов передачи отдельных ветвей расширенного графа.

Для этого введем в расширенный граф единичный узел, потенциал или ток которого равен единичному значению соответствующего параметра. Этот узел будет общим узлом всех независимых источников, а значения выходных параметров источников будут коэффициентами передач ветвей, исходящих из единичного узла.

В качестве примера рассмотрим применение данной методики к анализу погрешностей блоков и узлов СИ на основе ОУ, например, для анализа погрешностей коэффициента передачи инвертирующего усилителя (рис. 2,а). Реальный коэффициент передачи его в соответствии с выражением (4) имеет следующий вид:

$$G_{\text{иу(реал)}} = \frac{-kg_1g_3}{kg_2g_3 + (g_1 + g_2 + g_3)g_{\text{вх}} + (g_1 + g_2)g_3}. \quad (24)$$

Здесь знаменатель выражения (24) является определителем  $\Delta$  графа, а сам граф представляет собой частный случай дробно-линейной функции.

Так как все параметры входят в выражение (24) в первой степени, то оно представляет собой дробно-линейную функцию. Весовые коэффициенты погрешностей  $S_{gi}$  определяются частными случаями (18) и (19). Тогда выражения для весовых коэффициентов отдельных частных составляющих погрешности реального коэффициента передачи инвертирующего ОУ будут иметь следующий вид:

$$S_{g1} = -[1 + (g_1g_{\text{вх}} + g_1g_3)(kg_2g_3 + g_2g_{\text{вх}} + g_3g_{\text{вх}} + g_2g_3)^{-1}]^{-1}; \quad (25)$$

$$S_{g2} = [1 + (kg_2g_3 + g_2g_{\text{вх}} + g_2g_3)(g_1g_3 + g_1g_{\text{вх}} + g_3g_{\text{вх}})^{-1}]^{-1}; \quad (26)$$

$$S_{g_{\text{вх}}} = -[1 + [(g_1 + g_2 + g_3)g_{\text{вх}}(kg_2g_3 + (g_1 + g_2)g_3)^{-1}]^{-1}; \quad (27)$$

$$S_{gk} = -[1 + kg_2g_3 [(g_1 + g_2 + g_3)g_{\text{вх}} + (g_1 + g_2)g_3]^{-1}]^{-1}; \quad (28)$$

$$S_{g3} = [1 + (g_1 g_{вх} + g_1 g_3)(g_2 g_3 + g_2 g_{вх} + g_3 g_{вх})^{-1}]^{-1}. \quad (29)$$

Так как значения проводимостей ветвей графа  $g_i$  меньше единицы, а значение коэффициента передачи ОУ больше тысячи, то весовой коэффициент погрешности  $S_{gi}$  может иметь как очень малое значение, так и значение, близкое к единице. Значение весового коэффициента погрешности  $S_{gi}$  определяется положением коэффициента передачи операционного усилителя  $k$  (в числителе или знаменателе). Когда значение весового коэффициента погрешности  $S_{gi}$  близко к единице, требования к параметрам схем наиболее высокие.

### Заключение

Использование топологических графов позволяет получить выражения для коэффициентов передач ОУ без составления систем уравнений и их решения. Это приводит к резкому сокращению времени на проведение расчетов.

Использование топологических графов позволяет во много раз упростить решение данных задач за счет непосредственного перехода от принципиальной электрической схемы к топологическому графу, на основании которого можно получить функцию передачи усилителя и произвести анализ погрешности измерений.

### Список литературы

1. Мэзон, С. Электрические цепи, сигналы и системы / С. Мэзон, Г. Циммерман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1963. – 619 с.
2. Добровинский, И. Р. ИИС для измерения параметров электрических цепей / И. Р. Добровинский, Е. А. Ломтев. – М. : Энергоатомиздат, 1999. – 120 с.
3. Гутников, В. С. Интегральная электроника в измерительных устройствах / В. С. Гутников. – Л. : Энергоатомиздат, 1998. – 203 с.

---

#### **Добровинский Игорь Рувимович**

доктор технических наук, профессор,  
кафедра информационно-измерительной  
техники, Пензенский государственный  
университет

E-mail: idobr@tl.ru

#### **Dobrovinskiy Igor Ruvimovich**

Doctor of engineering sciences, professor,  
sub-department of information-measuring  
technology, Penza State University

#### **Ломтев Евгений Александрович**

доктор технических наук, профессор,  
кафедра информационно-измерительной  
техники, Пензенский государственный  
университет

E-mail: rectorat@pnzgu.ru

#### **Lomtev Evgeny Alexandrovich**

Doctor of engineering sciences, professor,  
sub-department of information-measuring  
technology, Penza State University

#### **Медведик Юрий Тимофеевич**

кандидат технических наук, ассистент,  
кафедра электротехники и транспортного  
электрооборудования, Пензенский  
государственный университет

E-mail: yura.medvedik@mail.ru

#### **Medvedik Yuriy Timofeevich**

Candidate of engineering sciences, assistant,  
sub-department of electrical engineering  
and transport electrical equipment,  
Penza State University



**Стеблев Павел Михайлович**  
аспирант, Пензенский  
государственный университет  
E-mail: rs-pilot@bk.ru

**Steblev Pavel Mikhaylovich**  
Postgraduate student,  
Penza State University

**Трофимов Алексей Александрович**  
аспирант, Пензенский  
государственный университет  
E-mail: trof.aa@mail.ru

**Trofimov Aleksey Alexandrovich**  
Postgraduate student,  
Penza State University

---

УДК 621.317.7

**Добровинский, И. Р.**

**Использование топологических графов для расчета схем узлов средств измерений на операционных усилителях и анализа их погрешностей** / И. Р. Добровинский, Е. А. Ломтев, Ю. Т. Медведик, П. М. Стеблев, А. А. Трофимов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – № 1 (17). – С. 139–147.