

Синтетическая теория прочности. Часть II. О диссипативной функции в моделях упругопластических сред

Е.И. Шемякин

Московский государственный университет, Москва, 119899, Россия

Продолжается обсуждение основных гипотез, положенных в основу синтетической теории прочности. Дано явное представление диссипативной функции через новые инварианты, введенные ранее.

Представление диссипативной функции в математических моделях упругопластических сред отражает основные механические гипотезы, положенные в основу модели.

Обычно обсуждение начинается с теоремы об энергии в единице объема сплошной среды, поведение которой описывается тензором (девиатором) напряжений σ_{ij} и тензором (девиатором) деформаций ε_{ij} или скоростей деформаций

$$\int_S \sigma_{\nu} \mathbf{u} dS + \int_V \mathbf{F} \mathbf{u} dV = 2 \int_V W dV, \quad (1)$$

где σ_{ν} — напряжение на поверхности S , ограничивающей занятый средой объем V ; \mathbf{F} — объемные силы; \mathbf{u} — вектор перемещений (или скоростей перемещений); W — запасенная или потенциальная энергия:

$$2W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2)$$

Внутри тела напряжения σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия (или динамики) Коши

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0. \quad (3)$$

Силами инерции и соответственно их работой далее пренебрежем.

В теории идеально упругого тела величина W определяет упруго запасенную энергию в объеме V под действием поверхностных усилий σ_{ν} и объемных сил \mathbf{F} .

В теории упругости оказывается естественным (для изотропного и однородного тела) предположение, что главные направления тензоров напряжений и деформаций совпадают, а тогда функции W можно придать вид:

$$2W = \sigma_i \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где σ_i — главные значения тензора напряжений, а ε_i — те же значения для деформаций.

Обычно при построении диссипативной функции в моделях пластических сред автоматически (или по аналогии с упругим телом) предполагается, что главные направления тензоров напряжений и скоростей деформаций совпадают и в пластическом состоянии, а значит

$$\Delta D = \sigma_i \Delta \varepsilon_i^p,$$

где $\Delta \varepsilon_i^p$ — приращения пластической деформации на каждом шаге нагружения. Если принять в качестве поверхности нагружения некоторое гладкое описание

$$f(\sigma_i) = \text{const}, \quad (5)$$

например в виде условия Губера–Мизеса и его обобщений, то далее, как обычно, следуют условие градиентальности и ассоциированный закон течения

$$\Delta \varepsilon_i^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

λ — параметр. Совокупность данных (4)–(6) дает описание диссипации. На этом шаге видны трудности, свя-

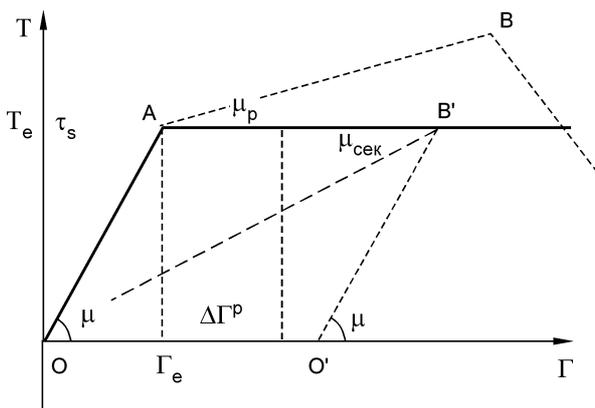


Рис. 1. Диаграмма кручения

занные с выбором диссипативной функции и гладкости $f(\sigma_i)$ в описании поверхности нагружения.

Будем рассматривать пока симметричные тензоры второго ранга для напряжений и деформаций.

1. Подобие тензоров означает

$$\mu_\sigma = \mu_\epsilon, \quad (7)$$

μ_σ, μ_ϵ — параметры Лодэ–Надаи, при этом μ_σ и μ_ϵ сохраняются при изменении первых инвариантов или шаровой части тензоров σ_{ij} и ϵ_{ij} . Это также относится и к другим наборам инвариантов [1, 2], где σ_n и ϵ_n представляют шаровые тензоры определенной величины [1]

$$T, \mu_\sigma, \sigma_n \text{ и } \Gamma, \mu_\epsilon, \epsilon_n. \quad (8)$$

Точнее говоря, подобие тензоров является очень сильным требованием, в которое включается собственно подобие (пропорциональность компонент тензоров) и совпадение главных направлений тензоров (девиаторов).

Это можно продемонстрировать, используя представление тензоров с помощью соответствующих “эллипсоидов” по Коши (квадратичных форм для девиаторов напряжений или деформаций).

2. Каждый из тензоров (девиаторов) можно охарактеризовать тремя главными значениями

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{ и } \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \quad (9)$$

и тремя главными направлениями.

Последние (направления), вообще говоря, могут не совпадать — все или какие-либо два из трех. Совпадение вторых направлений, например, имеет место в интересных случаях плоской или осесимметричной задачи.

3. Обратимся к изучению изменения особенностей деформирования за пределом упругости (или предела пропорциональности напряжений и деформаций при нагружении), основываясь на диаграмме кручения $T = T(\Gamma)$ при $\mu_\sigma = 0$ (рис. 1).

Измерения указывают на следующие принципиальные для дальнейшего особенности этой зависимости при неподвижных главных направлениях тензоров напряжений и деформаций (при неподвижных главных направлениях в первоначально однородном и изотропном теле нет оснований ожидать поворота главных направлений) (рис. 2).

После первоначального линейного участка OA с модулем сдвига μ находится участок AB с $\mu_p < \mu$. По-видимому, именно на этом участке возникают остаточные деформации, о которых можно судить, если произвести разгрузку $\Delta T < 0$ на участке $B'O'$ с наклоном, близким к μ . Если такой участок $B'O'$ существует, то этот факт и позволяет отделить упругую деформацию от остаточной (пластической) деформации

$$\Delta \Gamma = \Delta \Gamma_e + \Delta \Gamma^p. \quad (10)$$

Наконец, в последние годы в связи с появлением “жестких” машин открылась возможность определения участка “разрушения” за точкой B , на котором заметны многие свойства материала: а) проявление блочной структуры, наметившееся уже на участке AB в связи с появлением (явным или неявным) линий скольжения и площадок скольжения; б) масштабный эффект (влияние размера образца на результаты опыта — в игру вступает размер блока или расстояние между линиями скольжения).

Обсудим прежде всего поведение материала на участке AB с $\mu_p < \mu$; последнее весьма существенно, ибо материалы с обратным соотношением ($\mu_p > \mu$) практически неизвестны, либо для этого требуются специальные условия нагружения.

Итак, рассматривается участок AB сначала при неподвижных осях, а затем и при повороте осей тензоров напряжений и деформаций. Прежде обратим внимание на диаграммы распределения касательных деформаций и напряжений для участка AB с $\mu_p < \mu$ (рис. 3).

Максимальные касательные напряжения T действуют на площадках, разделяющих пополам углы между

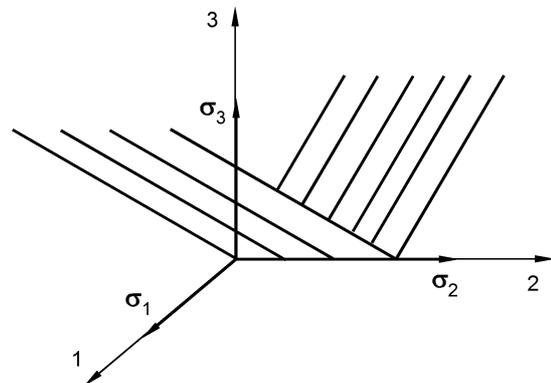


Рис. 2. Площадки скольжения

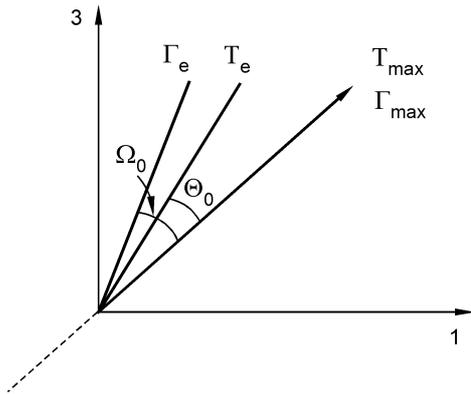


Рис. 3. Веер площадок скольжения

первым и третьим главными направлениями и проходящих через второе главное направление (перпендикулярное плоскости рисунка).

Это же справедливо и для главных сдвигов Γ , при этом $\mu_p < \mu$. Вычислим касательные напряжения на площадках, наклоненных к главным под углом 2Θ , и главные сдвиги на этих же площадках.

В силу основного упомянутого свойства $\mu_p < \mu$ (или даже $\mu_p \ll \mu$) величины Γ и Γ изменяются по-разному: если Γ растет незначительно при $T > T_A$ или не растет в случае площадки текучести $T_A = T_e$, то величина Γ растет значительно (Γ может достигать величин $\sim 10\Gamma_e$). В соответствии с этим определяются и вееры площадок в окрестности площадки с T_{max} или Γ_{max} . Определим при $T > T_A$ углы Θ_0 и Ω_0 , на которых достигается величина $T_{max} > T_A$ или $\Gamma_{max} > \Gamma_e$:

$$\cos 2\Theta_0 = \frac{T_A}{\Gamma_{max}} < 1 \tag{11}$$

и

$$\cos 2\Omega_0 = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_{max}} < 1. \tag{12}$$

Очевидно, что в силу $\mu_p < \mu$ будет справедливо

$$\Theta_0 < \Omega_0, \tag{13}$$

т.е. веер площадок по деформациям с величинами деформаций $\Gamma_e < \Gamma < \Gamma_{max}$ значительно шире веера площадок по напряжениям $T_A < T < T_{max}$.

Это обстоятельство не учитывается обычно в экспериментах и в теоретических моделях, хотя уже после работ Батдорфа и Будянского [3] должно было привлечь внимание ученых, особенно в связи с изучением явлений пластических процессов с поворотом главных осей тензоров напряжений и деформаций.

В работе [4] на это было обращено внимание и была указана схема учета этого факта при построении математических моделей пластичности. Укажем на некоторые основные качественные следствия из указанного факта.

1. При пластической деформации $T > T_A$, $\Gamma > \Gamma_e$ при неподвижных главных направлениях материал приобретает анизотропию, даже если в исходном состоянии он был изотропным (и однородным). Действительно, основная зависимость $T = T(\Gamma)$ при $\mu_\sigma = 0$, справедливая для основных площадок скольжения, не соблюдается для других площадок из вееров для напряжений и деформаций в силу свойства материала $\mu_p < \mu$. Только для идеально упругого материала зависимость между T и Γ с одним и тем же модулем сдвига повторяется на всех других площадках при $T < T_A$.

Приобретенная, индуцированная пластическими деформациями, анизотропия является едва ли не основным свойством пластичности¹.

2. В силу различия вееров при $T > T_A$ (или при $T = T_e$) возникает вопрос о различной роли площадок скольжения по напряжениям ($\Gamma = \Gamma_{max} > T_A$) или деформациям ($\Gamma = \Gamma_{max} > \Gamma_e$). Всегда по деформациям широкий веер $\Omega_0 > \Theta_0$ определяет ослабление в силу того, что в этом веере с $\Gamma > \Gamma_e$ материал слабо (по сравнению с упругим состоянием) сопротивляется сдвигам ($\mu_p < \mu$). Если рассматривать значительно более узкий веер по напряжениям, то материал держит напряжения $T = T_e$ практически как в упругом состоянии. В модели [4] было предложено рассматривать некоторое среднее в диапазоне $[\Theta_0, \Omega_0]$ значение угла для реальной площадки скольжения β_* и значение модуля μ_* также среднее в диапазоне $[\mu_p, \mu]$ и переменное в зависимости от достигнутой величины главного сдвига. Эти значения β_* и μ_* определяются из специального опыта, дополнительного к простому опыту по одноосному растяжению (сжатию) образца из испытуемого материала.

В связи с рассмотренными веерами площадок следует обсудить представления об упрочнении и разупрочнении среды в пластическом состоянии. Как было отмечено, за точкой B наступает состояние разрушения, явного проявления блочной структуры, которая зародилась в начале развития пластического состояния в виде площадок скольжения. Это слабо изученное состояние иногда называют состоянием предразрушения.

Первое замечание связано с термином “упрочнение”. Строго говоря, происходит не упрочнение материала по сравнению с упругим сопротивлением сдвигу, а ослабление, как это было показано на веерах $T_A < T_{max}$, $\Gamma_e < \Gamma_{max}$. Упрочнение если и происходит, то по сравнению с идеальной пластичностью. Действительно, только на главной площадке имеет место постоянное сопротивление сдвигу $T = T_A$, на всех других площадках $T < T_A$, т.е. сопротивление сдвигу должно происходить по упругому закону, т.к. на этих площадках

¹ Конечно, аналогичное замечание справедливо и для вязких сред, если модуль вязкости на диаграмме $T = T(\dot{\Gamma})$, где $\dot{\Gamma}$ — скорость деформаций, не является постоянным.

касательное напряжение меньше предельного. Сопротивление элемента среды в целом определяется слабым звеном, т.е. главной площадкой, а сдвиги могут развиваться на всех других площадках, где $\Gamma > \Gamma_e$, включая главные с Γ_{\max} . Это обстоятельство привело исследователей к выводу о локализации деформаций за счет главного сдвига Γ . Возникают видимые как линии Людерса–Чернова площадки скольжения или невидимые, но явно существующие и определяемые другими методами (травления и т.п.).

Для синтетической теории прочности, основанной на исходной паспортной зависимости $T = T(\Gamma)$ при $\mu_\sigma = 0$, как следует из предыдущего, необходимо уточнить паспортную зависимость при $\mu_\sigma \neq 0$ и ввести в зависимость между инвариантами напряженного и деформированного состояния явную величину угла $\alpha = \Omega - \Theta$, определяющую разность тензоров на каждом шаге нагружения (деформирования).

Так что в синтетической теории прочности возникновение необратимых деформаций следует воспринимать как первую стадию разрушения материала, а появление блочной структуры как разделение тела на части. То, что было отмечено на материале с идеальной текучестью, должно, по-видимому, проявляться и для внешне упрочняющихся материалов. Действительно, не вступая в противоречие с фактами, можно предположить, что на пределе упругости $T = T_A$, $\Gamma = \Gamma_e$ в материале возникает предсказанная упругими деформациями сетка линий скольжения с $T = T_{\max}$, $\Gamma = \Gamma_{\max}$ и деформирование материала происходит за счет проскальзывания с сопротивлением (упрочнение) или без дополнительного сопротивления (площадка текучести) на поверхностях (линиях) скольжения

$$\Delta T = \mu_p \Delta \Gamma, \quad (14)$$

где величину μ_p можно назвать модулем упрочнения. Участки материала между линиями скольжения (полосы, блоки) могут деформироваться упруго или даже считаться жесткими, в силу $\mu_p < \mu$. В целом это представление было предложено ранее [5], развивается в работах этого направления [4, 6, 7] и положено в основу синтетической теории прочности [1, 2, 8].

Возвращаясь к обсуждению вееров площадок в окрестности главных по напряжениям и деформациям, отметим, что в случае упрочнения справедливы те же выводы, что и для идеальной пластичности. Рассчитанные по правилам тензорного проектирования вееры по напряжениям и по деформациям отличаются друг от друга. Так, по напряжениям $T_{\max} > T_A$ веер оказывается более узким, чем по деформациям $\Gamma_{\max} > \Gamma_e$. Это связано с тем, что $\mu_p < \mu$ или даже $\mu_p \ll \mu$.

Второе замечание по поводу моделей с упрочнением связано с нагружением с поворотом главных направ-

лений тензоров, с так называемым сложным нагружением по А.А. Ильюшину. Как было предложено в работе [4], надо ввести в рассмотрение дополнительные характеристики: β_* — угол некоторой промежуточной площадки, на которой происходит изменение главного сдвига $\Gamma > \Gamma_e$, и μ_* — модуль сопротивления сдвигу на этой площадке. Реально такая площадка может и не реализоваться. Скорее, эти вводимые в соответствии с опытом величины будут указывать правило, как рассчитать усилия на этих и других площадках при сложном нагружении. Например, в простой сравнительно ситуации о поведении тонкостенного трубчатого образца, растянутого за предел упругости и закручиваемого моментом при постоянной осевой силе, когда явно проявляется анизотропия.

Наконец, заметим, что величины β_* и μ_* были введены для монотонного сложного нагружения, так было названо нагружение при монотонном изменении Θ . Это означает, в частности, что вееры площадок могут поворачиваться вместе с главными направлениями, могут подготавливаться (к ослаблению) новые площадки, могут изменяться величины β_* и μ_* , могут “залечиваться” покинутые площадки, ранее имевшие большие напряжения. Это неисследованные вопросы, хотя можно вводить разные предположения о развивающейся анизотропии и о развитии разгрузки в этих безусловно интересных ситуациях.

К обсуждению математических моделей идеальных пластических тел в последних публикациях проявляется значительный интерес [1, 2, 9, 10]. При этом новые результаты связаны с развитием идей Т. Кармана о состояниях полной и неполной пластичности и сингулярных условиях пластичности типа Треска–Сен-Венана [2, 5, 6]. Основное значение имеет выражение для диссипативной функции, отражающей потери энергии при необратимых (пластических) деформациях сдвига, т.к. потери энергии за счет объемных деформаций на этом уровне не рассматриваются (эффектами переупаковки и дилатансии пренебрежено). Таким образом, представление диссипативной функции отражает основные механические гипотезы, положенные в основу математической модели.

Обычно при построении выражения для диссипативной функции автоматически (или по аналогии с идеально упругим телом) предполагается, что главные направления тензоров напряжений и деформаций (скоростей деформаций) совпадают и в пластическом состоянии, а значит, выражение для D имеет вид:

$$\Delta D = \sigma_i \Delta \epsilon_i^p, \quad (15)$$

где σ_i — главные напряжения, а $\Delta \epsilon_i^p$ — приращения пластической деформации на каждом шаге нагружения. В соответствии с введенными ранее инвариантами на-

пряженного и деформированного состояний [1, 2] будем рассматривать наборы инвариантов (8)

$$T, \mu_\sigma, \sigma_n \quad \text{и} \quad \Gamma, \mu_\epsilon, \epsilon_n, \quad (16)$$

где T, Γ — максимальное касательное напряжение и главный сдвиг на основной площадке; σ_n — нормальное напряжение на той же площадке; ϵ_n — нормальная к площадке главного сдвига деформация, а μ_σ, μ_ϵ — параметры Лодэ–Надаи для соответствующих состояний. Для этих наборов инвариантов характерна известная привязка к триэдру (триэдрам!) главных направлений, хотя ϵ_n и σ_n представляют шаровые тензоры.

По нашему мнению, значение параметров μ_σ и μ_ϵ выходит за рамки обсуждения математической постановки о подобии, т. к. эти параметры содержат существенную информацию о роли других площадок с экстремальными значениями касательных напряжений и деформаций на кругах Мора:

$$T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad (17)$$

$$\mu_\sigma = \frac{T_{23} - T_{12}}{T}. \quad (18)$$

С этой точки зрения важно разделить два требования: о пропорциональности и о совпадении главных осей, особенно в связи с состояниями неполной и полной пластичности, как это было введено Т. Карманом [6].

Рассмотрим состояние неполной пластичности при неподвижных (по отношению к исходному, упругому состоянию) главных направлениях. По Т. Карману это означает, что только максимальное касательное напряжение T достигает предельного по Треска–Сен-Венану значения для данного материала $T = \tau_s$, а два других экстремальных касательных напряжения остаются меньше этого предела. В этом состоянии имеют место две особенности деформирования при переходе к полной пластичности, в котором два из трех экстремальных касательных напряжений принимают предельные значения и остаются постоянными при деформировании. Первая особенность связана с тем, что по второму главному направлению сохраняются упругие связи, т. е. тело становится анизотропным по отношению к сдвигам (ортотропным, по крайней мере). Вторая опирается на исследование вееров площадок в окрестности площадки главного сдвига. На основной площадке достигнуто постоянное значение T , и главный сдвиг Γ растет (идет пластическое деформирование), а в окрестности этой площадки, разделяющей пополам углы между первым и третьим главными направлениями и проходящей через второе главное направление, т. е. на других площадках, также проходящих через это направление, касательные усилия меньше предельного. Величины сдвигов на этих

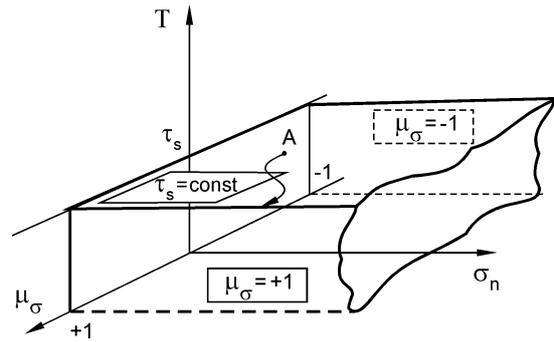


Рис. 4. Предельная поверхность

площадках никак не связаны с величиной “своего” касательного напряжения, опять проявляется анизотропия сопротивления сдвигу (ортотропия, если иметь в виду ортогональность триэдра главных направлений). Эти особенности пластического состояния имеют большое значение, особенно при повороте главных направлений напряженного и деформированного состояний [4].

Таким образом, при переходе к пластическому состоянию материал может приобрести свойство анизотропного сопротивления сдвигам, даже если в исходном состоянии он был однородным и изотропным. Индуцированная пластическими деформациями анизотропия является едва ли не основным свойством твердых тел, как и остаточная деформация. (Возможно, аналогичное замечание справедливо и при построении математических моделей вязких неньютоновских сред.)

2. Рассмотрим переход от неполной пластичности к полной при сохранении главных направлений напряженного и деформированного состояний. Причем в общей связи инвариантов

$$G(T, \mu_\sigma, \sigma_n) = 0, \quad (19)$$

где G — экспериментально определяемая функция (см., например, [2]), влияние вида напряженного состояния μ_σ сказывается на включении полной пластичности только за счет других экстремальных площадок в дополнение к основной. Шаровой тензор σ_n вызывает только объемные деформации и на процесс пластического деформирования не влияет. Можно представить в пространстве инвариантов T, μ_σ, σ_n поверхность, отображающую процесс нагружения и деформирования (рис. 4). Точка A изображает исходное состояние неполной пластичности, точки внутри прямоугольного параллелепипеда — упругое состояние. Движение точки A при изменении напряжений в плоскости $T = \tau_s = \text{const}$ отвечает упругим деформациям во втором главном направлении. Приближение A к грани $\mu_\sigma = -1$ означает, что на площадке с напряжением T_{12} достигается предельное значение — наступает полная пластичность:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_s, \quad (20)$$

т. е. при стремлении A к грани $\mu_\sigma = -1$ напряжение T_{12} растёт, а T_{23} падает. Приближение A к грани $\mu_\sigma = 1$ означает рост касательных напряжений T_{23} и уменьшение T_{12} . Надо подчеркнуть, что уменьшение T_{12} или T_{23} , там где оно происходит, не означает разгрузки на этих площадках в силу сохранения упругой связи по второму главному направлению в состоянии неполной пластичности. Рассмотренная схема нагружения и деформирования идеальных упругопластических тел может быть положена в основу классификации типов нагружения. Так, “простым” нагружением в широком смысле [5] может быть движение точки A по грани $T = \text{const}$ в пределах $1 > \mu_\sigma > -1$ без достижения крайних значений. Движение внутрь объема, как было отмечено, означает разгрузку.

Простым нагружением является и нагрузка на ребрах $\mu_\sigma = \pm 1$, если переход в полную пластичность совершается сразу из упругого состояния. Однако в этом случае, кроме упругой разгрузки есть еще и частичные разгрузки. Это происходит при перемещении точки A на одну из граней слева или справа от ребра. Так переход на грань $\mu_\sigma = 1$ означает разгрузку на площадке с напряжением T , при этом приращения T и Γ связаны упругим законом

$$\Delta T = \mu \Delta \Gamma. \quad (21)$$

Завершая эскиз классификаций нагружений, отметим, что сложным следует называть нагружение с поворотом главных направлений. При таких нагружениях, как было отмечено выше, появляется разность тензоров, так что максимальные касательные напряжения и главные сдвиги действуют на разных несовпадающих площадках. Примеры сложных нагружений в такой классификации имеются в работе [4].

3. Возвращаясь к структуре диссипативной функции, отметим особенности условия пластичности (19) при переходе от неполной к полной пластичности. Учитывая, что $T = \text{const}$, а σ_n не влияет на пластическое деформирование, из (19) имеем

$$G(\bar{\mu}_\sigma) = \text{const}, \quad \bar{\mu}_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{2\tau_s}. \quad (22)$$

Как было сказано, линией перехода к полной пластичности является ребро $\mu_\sigma = 1$, либо $\mu_\sigma = -1$. Таким образом, условием перехода к полной пластичности будет

$$\bar{\mu}_\sigma = \pm 1. \quad (23)$$

По поводу вычисления сдвигов отметим, что величина сдвигов на экстремальных площадках управляется параметром μ_ϵ , а сама величина Γ не связана с напря-

женным состоянием и определяется геометрией задачи (сеткой линий скольжения и краевыми условиями задачи, включая упругие области; сетка определяется из условий на границе с упругой зоной).

Наконец, перепишем выражение для диссипативной функции в новых инвариантах, имея в виду

$$\sigma_1 = T + \sigma_n, \quad \sigma_2 = \mu_\sigma T + \sigma_n, \quad \sigma_3 = -T + \sigma_n, \quad (24)$$

так что

$$\sigma_i \Delta \epsilon_i^p = T \Delta \Gamma^p + \mu_\sigma T \Delta \epsilon_2^p = T \Delta \Gamma^p \left(1 + \mu_\sigma \frac{\mu_{\Delta \epsilon}}{3} \right). \quad (25)$$

В выражение ΔD величина μ_ϵ не входит, но входит $\mu_{\Delta \epsilon}$. Заметим, что:

1. Только при $\mu_\sigma = 0$ (чистый сдвиг) величина $\Delta \epsilon_2^p$ не входит в D . При других значениях $\mu_\sigma \neq 0$ величина $\Delta \epsilon_2^p$ может влиять на диссипацию. Это связано с тем, что $\Delta \epsilon_2^p$ непосредственно выражается через $\mu_{\Delta \epsilon}$ и $\Delta \Gamma^p$ вследствие несжимаемости среды:

$$\mu_{\Delta \epsilon} = \frac{3\Delta \epsilon_2^p}{\Delta \Gamma^p}. \quad (26)$$

2. В случае полной пластичности $\mu_\sigma = \pm 1$

$$\Delta D = T(\Delta \epsilon_1^p - \Delta \epsilon_3^p + \mu_\sigma \Delta \epsilon_2^p),$$

т. е. в этих случаях $\Delta \epsilon_2^p$ влияет на общую диссипацию, а вступлением в игру второго направления управляет μ_σ .

В силу линейной зависимости D от μ_σ нет необходимости оптимизировать D , оптимальное значение очевидно:

$$\Delta D = 4/3 T \Delta \Gamma^p > 0$$

независимо от знака μ_σ . Эксперименты Тэйлора и Квини [1, 2, 11] показывают, что в случае полной пластичности подобие тензоров, нарушенное в неполной пластичности, может восстановиться. Это означает, что диссипация энергии на пластических деформациях управляется параметром $\mu_{\Delta \epsilon}$.

В свою очередь, это означает, что при $\mu_\sigma = 1$ приращения, но не сами сдвиги, равны

$$\Delta \Gamma_{23}^p = \Delta \Gamma^p,$$

а при $\mu_\sigma = -1$ соответственно

$$\Delta \Gamma_{12}^p = \Delta \Gamma^p.$$

Положительность D позволяет рассмотреть теоремы о единственности решения краевых задач для упругопластических тел и вариационные принципы. При этом справедлива запись теоремы об энергии тела:

$$\int_S \sigma_{ij} u_j dS + \int_V \mathbf{F} u dV = 2 \int_V W dV + \int_V D dV,$$

где W — положительно определенная квадратичная форма от напряжений или деформаций для упругих сос-

тояний, а D положительна при всех $\mu_{\Delta\epsilon}$ и Γ^p ; \mathbf{u} представляет перемещения или скорость перемещений. При вычислении D учтено условие полной пластичности.

Литература

1. Шемякин Е.И. Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях сплошной среды // ДАН. – Т. 373. – № 5. – С. 1–3.
2. Шемякин Е.И. Синтетическая теория прочности. Часть I // Физ. мезомех. – 1999. – Т. 2. – № 6. – С. 63–69.
3. Batdorf S.B., Budiansky B. Mathematical theory of plasticity based on the concept of slip // NASA, Tech. Note, 1949. – № 1871.
4. Христианович С.А., Шемякин Е.И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – № 5. – С. 138–148.
5. Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. – № 4. – С. 87–97.
6. Карман Т., Хаар А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. – М., 1948.
7. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. – 1974. – № 3. – С. 3–9.
8. Шемякин Е.И. О хрупком разрушении твердых тел // МТТ. – 1997. – № 2. – С. 145–150.
9. Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю. Полная пластичность в теории идеально-пластического тела // ДАН. – 1999. – Т. 108. – № 3. – С. 333–334.
10. Аннин Б.Д. О теориях идеальной пластичности с сингулярной поверхностью текучести // ПМТФ. – 1999. – Т. 40. – С. 181–188.
11. Доцинский Г.А. Об экспериментальной проверке закона подобия девиаторов в теории пластичности // Изв. Томск. политех. ин-та. – 1974. – Т. 188. – С. 20–24.