УДК 519.86

В.К. Тютюкин

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ОБОРОТНЫХ ЗАДЕЛОВ НА ПРЯМОТОЧНОЙ ЛИНИИ С НЕПРЕРЫВНЫМ РЕГЛАМЕНТОМ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ

При построении оптимальных планов работы прямоточных линий в качестве целевой функции выбирается обычно какой-либо из видов оборотного задела – переходящий, максимальный или средний задел на линии. Для нахождения аналитических выражений для этих заделов, описываемых кусочно-линейными функциями, первоначально был предложен простейший математический инструмент в виде элементарной алгебры [1, с. 21–27]. Это позволяло строить лишь громоздкие таблицы, в которых приводятся многочисленные линейные виды межоперационных заделов в соответствующих областях, определяемых соотношениями характеристик смежных операций на линии (трудоемкость, начало и конец в периоде оборота).

Для получения единого выражения (общей формулы) к каждому из указанных заделов позднее был применен более продуктивный инструмент в виде решения некоторой экстремальной задачи [2] и в результате получены линейные комбинации модулей линейных функций. Данная статья посвящена улучшению этих формул, более компактной их записи.

Предварительные общие сведения для прямоточных линий

Воспроизведем сведения, которые были изложены нами ранее ([2, с. 107–108, 111–112] или [3, с. 36–41], но которые понадобятся нам для дальнейшего изложения.

Исходные данные и допущения. Пусть для прямоточной линии известны следующие величины: T – период оборота линии (период стандарт-плана); n – количество деталей, изготавливаемых на линии за период оборота; r – ритм (среднерасчетный) выпуска деталей ($rn = T$); m – количество операций (технологических, основных), выполняемых на линии (i – номер операции, $i = 1 : m$); a_i – штучное (т. е. для одной детали) время (нормативное) выполнения i-й операции ($i = 1 : m$). Передача деталей с операции на следующую на линии осуществляется поштучно. Предполагаем, что дублирующего оборудования на операциях нет, т. е. на каждой операции имеется по одному рабочему месту.

Обозначим: A_i – норма времени выполнения i-й операции для всех n деталей ($A_i = na_i$, $0 < A_i \le T$, $i = 1 : m$); x_i – момент начала i-й операции (т. е. операции на i-м рабочем месте) в периоде стандарт-плана ($x_i \ge 0$, $i = 1 : m$). Совокупность этих моментов, т. е. вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$, называется пооперационным стандарт-планом (ПСП) работы линии. Введем для него понятие оборотных заделов, сначала – межоперационных, затем – для линии в целом.

Введем функцию $C_i(t)$ – количество деталей, сделанных за промежуток времени $[0, t]$ на i-й операции, если она начинается в момент x_i $(0 \le t \le T,\ i = 1 : m)$. Очевидно, $0 \le C_i(t) \le n$ и

$$C_i(0) = 0,\ C_i(T) = n\ . \qquad (1)$$

Выберем пару последовательных (соседних, смежных) операций i и $i + 1$, выполняемых на линии ($i = 1 : m - 1$). Первая из них является подающей, а вторая – потребляющей (в данной их паре).

Определение 1. Внутренний задел между операциями i и $i + 1$ (межоперационный внутренний задел) – это функция

$$V_i(t) = C_i(t) - C_{i+1}(t) \quad (0 \le t \le T,\ i = 1 : m - 1). \qquad (2)$$

Она ввиду выполнения (1) обращается на концах промежутка [0, T] в ноль:

$$V_i(0) = V_i(T) = 0, \qquad (3)$$

и, кроме того, имеем $|V_i(t)| \le n$.

Физический смысл функции $V_i(t)$ достаточно очевиден: если $V_i(t) \ge 0$, то к моменту t перед операцией $i + 1$ имеется избыток деталей в количестве $V_i(t)$, вынужденных пролеживать после операции i, а если $V_i(t) \le 0$, то к моменту t для операции $i + 1$ имеется недостаток деталей в количестве $|V_i(t)|$ для обеспечения работы операции $i + 1$ с момента x_{i+1}. Свойство (3) показывает, что для задела $V_i(t)$ за период стандарт-плана T происходит полный оборот, т. е. исходя из нулевого значения (в момент $t = 0$) внутренний задел к концу периода оборота (в момент $t = T$) вновь обращается в ноль, при этом ликвидируются возникающие в промежуточные моменты t ($0 < t < T$) избытки (потребляемые операцией $i + 1$) и недостатки (покрываемые операцией i) деталей.

Определение 2. Оборотный задел между операциями i и $i + 1$ (межоперационный оборотный задел) – это функция

$$Z_i(t) = V_i(t) - \min_{0 \le t \le T} V_i(t) \quad (0 \le t \le T,\ i = 1 : m - 1). \qquad (4)$$

Минимум этой функции, очевидно, равен нулю:

$$\min_{0 \le t \le T} Z_i(t) = 0. \qquad (5)$$

Это свойство равносильно двум следующим ее свойствам.

1. Неотрицательность: $Z_i(t) \ge 0$ $(0 \le t \le T)$, т. е. на потребляющей операции не возникает дефицита в деталях ни в какой момент времени.

2. Обращение в ноль хотя бы в один момент времени: $\exists t_0$ $(t_0 \in [0, T])$ такой, что $Z_i(t_0) = 0$. Другими словами, в предыдущем свойстве $(Z_i(t) \ge 0)$ оценка снизу (ноль) – реализуется, является точной.

Физический смысл оборотного задела следующий: $Z_i(t)$ есть количество деталей на момент времени t, которые уже прошли операцию i, но еще не запущены на операцию $i + 1$ и, следовательно, которые вынуждены временно пролеживать между этими двумя операциями.

Для оборотного задела (функции) $Z_i(t)$ введем следующие три численные (т. е. не зависящие от времени t) характеристики, зависящие только от x_i и x_{i+1} моментов начал операций i и $i + 1$, и укажем их свойства.

Определение 3. Переходящий задел между операциями i и $i + 1$ (межоперационный переходящий задел) – это величина

$$P_i = -\min_{0 \le t \le T} V_i(t) \quad (i = 1 : m - 1). \qquad (6)$$

Величина P_i является:

1) неотрицательной ($P_i \ge 0$), что следует из формул (3) и (6),

2) значением оборотного задела в начале и в конце периода оборота:

$$P_i = Z_i(0) = Z_i(T), \qquad (7)$$

что следует из формул (4), (3) и (6).

Таким образом, физический смысл переходящего задела следующий: P_i есть количество деталей, которое должно быть между операциями i и $i + 1$ в начале периода оборота ($t = 0$) для выполнения условия (5), т. е. величина P_i должна быть, с одной стороны, не очень маленькой (чтобы $Z_i(t) \ge 0$), а с другой – не очень большой (чтобы $Z_i(t_0) = 0$).

Другими словами, величина P_i есть решение экстремальной задачи по нахождению минимального количества деталей (в момент $t = 0$), обеспечивающего бесперебойную (бездефицитную, непрерывную) работу операции $i + 1$ с момента x_{i+1}. Этот «начальный аванс» в помощь операции i в конце периода оборота возвращается этой операцией и «переходит» на следующий период оборота.

Формулу (4) с учетом формулы (6) можно переписать в виде $Z_i(t) = P_i + V_i(t)$. Таким образом, межоперационный оборотный задел есть сумма двух видов задела – межоперационного внутреннего и межоперационного переходящего заделов.

Определение 4. Максимальный задел между операциями i и $i + 1$ (межоперационный максимальный задел) – это наибольшее значение оборотного задела между этими операциями на всем периоде оборота:

$$M_i = \max_{0 \le t \le T} Z_i(t) = \max_{0 \le t \le T} \left[P_i + V_i(t) \right] = \\ = P_i + \max_{0 \le t \le T} V_i(t) \ \ (i = 1 : m - 1). \qquad (8)$$

Для максимального и среднего заделов (межоперационных) имеет место соотношение $M_i \ge P_i$, ибо наибольшее значение функции $(Z_i(t))$ на промежутке ([0, T]) не меньше ее значения в любой точке этого промежутка (в частности, в точке 0).

Значения M_i ($i = 1 : m - 1$) используются для правильного выбора величин емкостей, площадей или расстояний между рабочими местами для хранения межоперационных оборотных заделов, ибо для такого выбора исходить надо из худшего, т. е. наибольших величин этих заделов.

Определение 5. Средний задел между операциями i и $i + 1$ (межоперационный средний задел) – это среднее значение оборотного задела между этими операциями, т. е. функции $Z_i(t)$ на всем периоде оборота:

$$S_i = \frac{1}{T}\int_0^T Z_i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [P_i + V_i(t)]dt = P_i + \frac{1}{T}\int_0^T V_i(t)dt = \\ = P_i + \frac{1}{T}\int_0^T [C_i(t) - C_{i+1}(t)]dt = P_i + \frac{1}{T}\int_0^T C_i(t)dt - \qquad (9) \\ - \frac{1}{T}\int_0^T C_{i+1}(t)dt = P_i + C_i - C_{i+1} \ \ (i = 1 : m - 1),$$

где C_i – среднее количество деталей, сделанных на i-й операции за период оборота $\left(C_i = \frac{1}{T}\int_0^T C_i(t)dt \right)$.

Величины S_i ($i = 1 : m - 1$) используются для расчета потерь, связанных с пролеживанием деталей в незавершенном производстве, и далее – для связывания средств в незавершенном производстве.

Теперь введем для линии в целом понятие «оборотный задел» ($Z(t)$) и те же три численные (т. е. не зависящие от времени t и, следовательно, зависящие только от вектора X) его характеристики – переходящий (P), максимальный (M) и средний (S). Определим их как суммы межоперационных заделов соответствующего вида:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{m-1} Z_i(t), \ P = \sum_{i=1}^{m-1} P_i, \ M = \sum_{i=1}^{m-1} M_i, \ S = \sum_{i=1}^{m-1} S_i. \ (10)$$

Для функции $Z(t)$ можем получить и такое выражение:

$$Z(t) = P + C_1(t) - C_m(t). \qquad (11)$$

Действительно, имеем:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{m-1} Z_i(t) = \sum_{i=1}^{m-1} [P_i + V_i(t)] = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} P_i + \sum_{i=1}^{m-1} \left[C_i(t) - C_{i+1}(t) \right] = P + C_1(t) - C_m(t).$$

Средний задел S можно определить еще и как среднюю величину оборотного задела, т. е. как среднее значение функции $Z(t)$ за период оборота T:

$$S = 1/T \int_0^T Z(t)dt.$$

Действительно, по свойству среднего – среднее суммы равно сумме средних – имеем:

$$S = \sum_{i=1}^{m-1} S_i = \sum_{i=1}^{m-1} 1/T \int_0^T Z_i(t)dt = 1/T \int_0^T \sum_{i=1}^{m-1} Z_i(t)dt = \\ = 1/T \int_0^T Z(t)dt.$$

Заметим еще, что средний задел S выражается через переходящий задел P следующим образом:

$$S = P + C_1 - C_m. \qquad (12)$$

Действительно, используя цепочку формул (9) (ее начало и конец), имеем:

$$S = \sum_{i=1}^{m-1} S_i = \sum_{i=1}^{m-1} (P_i + C_i - C_{i+1}) = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} P_i + \sum_{i=1}^{m-1} (C_i - C_{i+1}) = P + C_1 - C_m.$$

Формула (12) показывает, что если известен переходящий задел P, то для вычисления среднего задела S можно обойтись без вычисления всех межоперационных средних заделов S_i.

Для нахождения аналитических выражений для всех межоперационных заделов (4), (6), (8), (9) и далее для линии в целом (10) необходимо предварительно установить вид введенной выше функции $C_i(t)$ (количества сделанных деталей на i-й операции к моменту t) и для получающейся тогда функции $V_i(t)$ – межоперационного внутреннего задела (2) найти, как видно из уже указанных формул, ее экстремумы (т. е. наименьшее и наибольшее значения). Проделаем это для случая так называемого непрерывного регламента выполнения операций.

Решение задачи для случая непрерывного регламента выполнения операций

Определение непрерывного регламента [2, с. 107]. В дальнейшем предполагаем, что на линии имеет место непрерывный регламент выполнения операций, т. е. считается, что любая операция заканчивается в том же периоде оборота, в котором она и начиналась. Аналитически это означает, что моменты начал выполнения операций (x_i) удовлетворяют неравенствам $x_i \le T - A_i$ (i = 1 : m). Тогда с учетом неотрицательности переменных имеем следующие двусторонние ограничения на них:

$$0 \le x_i \le T - A_i \, (i = 1 : m). \tag{13}$$

Такие ПСП назовем допустимыми. Геометрически множество всех допустимых ПСП в пространстве R^m представляет собой m-мерный прямоугольный параллелепипед (и, следовательно, это множество является выпуклым многогранником, что облегчает оптимизацию функций на таких множествах), одна из вершин которого находится в начале координат и грани которого параллельны координатным плоскостям.

Вид функции $C_i(t)$ [2, с. 108]. Рассмотрим нарастание количества сделанных деталей на i-й операции на протяжении периода оборота, т. е. функцию $C_i(t)$, введенную выше. На протяжении выполнения этой операции, т. е. в промежутке $[x_i, x_i + A_i]$, эта функция нарастает скачками в моменты окончания изготовления очередного экземпляра детали и, следовательно, является кусочно-постоянной. С небольшой погрешностью, а именно с точностью до одной детали, функцию $C_i(t)$ можно считать линейной и в рассматриваемом интервале $[x_i, x_i + A_i]$ (а не только вне его, где она является постоянной, равной 0 или n) и поэтому во всем интервале $[0, T]$ она является непрерывной кусочно-линейной функцией (ломаной) (рис. 1). Тогда для нее справедливо следующее аналитическое выражение:

$$C_i(t) = \min\left(n, \frac{(t - x_i)^+}{a_i}\right). \tag{14}$$

Здесь и в дальнейшем символы x^+ и x^- означают соответственно max(0, x) и min(0, x).

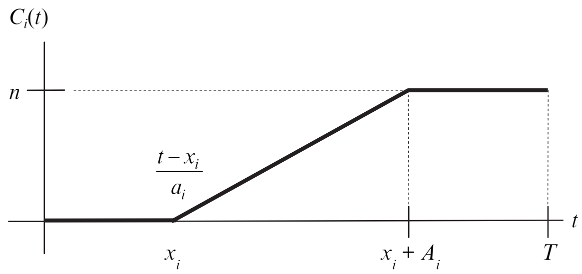

Рис. 1. График количества сделанных на i-й операции деталей

Выражение (14) является более компактным, чем ранее использованное выражение в виде линейной комбинации двух модулей линейных функций [2, с. 108], что и будет способствовать, как будет показано далее, получению более компактных выражений и для оборотных заделов всех видов.

Покажем, что среднее количество деталей, сделанных на i-й операции за период оборота, вычисляется по формуле

$$C_i = n - x_i / r - A_i / 2r. \tag{15}$$

Действительно, вычисляя площадь трапеции, образованной ломаной $C_i(t)$ (см. рис. 1), получим доказываемую формулу:

$$C_i = \frac{1}{T}\int_0^T C_i(t)dt = \frac{1}{T}\left(T - x_i - \frac{A_i}{2}\right)n =$$

$$= n - x_i / r - A_i / 2r.$$

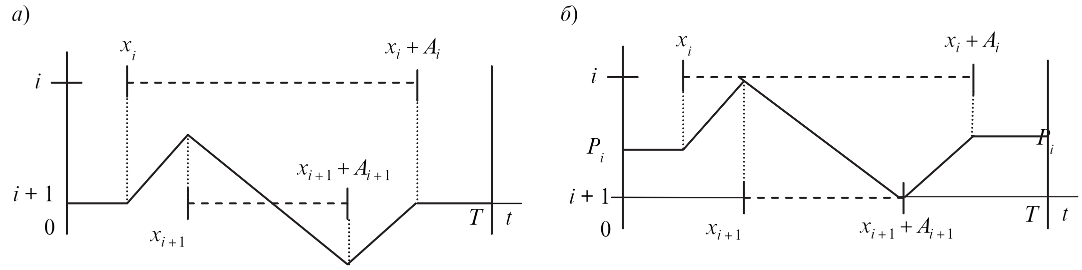

Рис. 2. График межоперационного внутреннего (*а*) и оборотного (*б*) заделов

Заметим, что функции $V_i(t)$ и $Z_i(t)$, как и $C_i(t)$, являются непрерывными кусочно-линейными, что следует из их выражений через $C_i(t)$ по формулам (2) и (4). Графики этих функций с учетом их значений на концах интервала $[0, T]$ (см. (3) и (7)) аналогичны представленным на рис. 2.

Экстремумы межоперационного внутреннего задела [2 , с. 108–110].

Подставляя (14) в (2), получим для межоперационного внутреннего задела следующее выражение:

$$V_i(t) = \min\left(n, \frac{(t - x_i)^+}{a_i}\right) - \min\left(n, \frac{(t - x_{i+1})^+}{a_{i+1}}\right). \quad (16)$$

Покажем, что ее экстремумы имеют вид:

$$\min_{0 \le t \le T} V_i(t) = -\min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right), \quad (17)$$

$$\max_{0 \le t \le T} V_i(t) = \min\left(n, \frac{(x_{i+1} - x_i + (A_{i+1} - A_i)^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right). \quad (18)$$

Как уже отмечалось, рассматриваемая функция (16) является непрерывной кусочно-линейной функцией. Тогда для нахождения ее экстремумов на промежутке $[0, T]$ достаточно:

1) рассмотреть концы этого промежутка, т. е. точки 0 и T , и (ввиду кусочной линейности рассматриваемой функции) абсциссы, принадлежащие промежутку $[0, T]$, только вершин этой ломаной, т. е. точки x_i, $x_i + A_i$, x_{i+1}, $x_{i+1} + A_{i+1}$;

2) вычислить значения функции (16) во всех этих точках, причем, согласно формуле (3) уже имеем $V_i(0) = V_i(T) = 0$ и, следовательно, $\min_{0 \le t \le T} V_i(t) \le 0$, $\max_{0 \le t \le T} V_i(t) \ge 0{,}3$. Из этих значений выбрать экстремальное:

$$\operatorname*{extr}_{0 \le t \le T} V_i(t) = \operatorname{extr}[0, V_i(x_i), V_i(x_i + A_i), V_i(x_{i+1}), V_i(x_{i+1} + A_{i+1})]. \quad (19)$$

Найдем каждую из четырех последних величин, стоящих под знаком extr в правой части этой формулы. Используя формулу (16), для них легко установить следующие знаки и аналитические выражения, которые ввиду их зависимости от разности $x_i - x_{i+1}$ $(x_i - x_{i+1} \in [A_{i+1} - T, T - A_i]$ – как следует из (13)) обозначим соответственно через $V_i^{(r)}(x_i - x_{i+1})$ $(r = 1 : 4)$:

$$V_i(x_i) = -\min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1})^+}{a_{i+1}}\right) = V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1}) \le 0; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} V_i(x_i + A_i) &= n - \min\left(n, \frac{(x_i + A_i - x_{i+1})^+}{a_{i+1}}\right) = \\ &= n - \left[\min\left(n, \frac{x_i + A_i - x_{i+1}}{a_{i+1}}\right)\right]^+ = \\ &= n + \left[-\min\left(n, \frac{x_i + A_i - x_{i+1}}{a_{i+1}}\right)\right]^- = \\ &= \min\left[n, n - \min\left(n, \frac{x_i + A_i - x_{i+1}}{a_{i+1}}\right)\right] = \\ &= \min\left(n, \frac{\left(x_{i+1} + A_{i+1} - x_i - A_i\right)^+}{a_{i+1}}\right) = \\ &= V_i^{(2)}\left(x_i - x_{i+1}\right) \ge 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$V_i(x_{i+1}) = \min\left(n, \frac{(x_{i+1} - x_i)^+}{a_i}\right) = \qquad (22)$$
$$= V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1}) \geq 0;$$

$$V_i(x_{i+1} + A_{i+1}) = \min\left(n, \frac{(x_{i+1} + A_{i+1} - x_i)^+}{a_i}\right) - n =$$
$$= \left[\min\left(n, \frac{(x_{i+1} + A_{i+1} - x_i)}{a_i}\right)\right]^+ - n =$$
$$= \max\left(-n, \frac{(x_{i+1} + A_{i+1} - x_i - A_i)^-}{a_i}\right) = \qquad (23)$$
$$= -\min\left(n, \frac{(x_i + A_i - x_{i+1} - A_{i+1})^+}{a_i}\right) =$$
$$= V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1}) \leq 0 \,.$$

Тогда формулу (19) можно переписать в виде

$$\underset{0 \leq t \leq T}{\operatorname{extr}} V_i(t) = \underset{1 \leq r \leq 4}{\operatorname{extr}} V_i^{(r)}(x_i - x_{i+1}) \,. \qquad (24)$$

Покажем, что во всей области $A_{i+1} - T \leq x_i - x_{i+1} \leq T - A_i$ изменения разности $x_i - x_{i+1}$ функции $V_i^{(r)}(x_i - x_{i+1})$ удовлетворяют неравенствам:

$$V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1}) \leq V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1}) \leq 0 \leq$$
$$\leq V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1}) \leq V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1}),$$
$$V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1}) \leq V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1}) \leq 0 \leq \qquad (25)$$
$$\leq V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1}) \leq V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1}),$$

где первая и вторая цепочки неравенств справедливы, если $a_i \leq a_{i+1}$ и $a_i \geq a_{i+1}$ соответственно.

Знаки функций $V_i^{(r)}(x_i - x_{i+1})$ уже были установлены выше в формулах (20)–(23). Поэтому для доказательства неравенств (25) осталось сравнить между собой функции в каждой паре $V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1})$, $V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1})$ и $V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1})$, $V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1})$. Ввиду кусочной линейности этих четырех функций, что следует из формул (20)–(23), для доказательства неравенств (25) между функциями в каждой из двух названных пар достаточно показать, что имеют место неравенства того же смысла между значениями этих функций на концах промежутка $[A_{i+1} - T, T - A_i]$ и во всех точках излома (каждой пары функций), принадлежащих этому промежутку.

Из формул (20) и (23) видно, что функции $V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1})$ и $V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1})$ имеют следующие точки излома: 0, $A_{i+1} - A_i$, A_{i+1}. Две первые из них всегда принадлежат промежутку $[A_{i+1} - T, T - A_i]$, а третью следует рассматривать лишь в случае $A_i + A_{i+1} \leq T$. Итак, по формулам (20) и (23) вычисляем значения функций $V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1})$ и $V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1})$ для указанных пяти точек. Результаты представим в виде табл. 1.

Таблица 1

Функции / $x_i - x_{i+1}$	$V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1})$	$V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1})$
$A_{i+1} - T$	0	0
$A_{i+1} - A_i$	$(A_i - A_{i+1})^- / a_{i+1}$	0
0	0	$(A_{i+1} - A_i)^- / a_i$
A_{i+1}	$-n$	$-n$
$T - A_i$	$(A_i + A_{i+1} - T)^+ / a_{i+1} - n$	$(A_i + A_{i+1} - T)^+ / a_i - n$

Очевидно, что при $a_i \leq a_{i+1}$ величины, стоящие в первом столбце этой таблицы, не превосходят величин, стоящих во втором, а при $a_i \geq a_{i+1}$ величины, стоящие во втором, не превосходят величин, стоящих в первом.

Из формул (22) и (21) видно, что функции $V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1})$ и $V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1})$ имеют следующие точки излома: $-A_i$, 0, $A_{i+1} - A_i$. Две последние из них всегда принадлежат промежутку $[A_{i+1} - T, T - A_i]$, а первую следует рассматривать лишь в случае $A_i + A_{i+1} \leq T$. Итак, по формулам (22) и (21) вычисляем значения функций $V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1})$ и $V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1})$ для указанных пяти точек. Результаты представим в виде табл. 2.

Таблица 2

Функции / $x_i - x_{i+1}$	$V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1})$	$V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1})$
$A_{i+1} - T$	$(T - A_i - A_{i+1})^- / a_i + n$	$(T - A_i - A_{i+1})^- / a_{i+1} + n$
$-A_i$	n	n
$A_{i+1} - A_i$	$(A_i - A_{i+1})^+ / a_i$	0
0	0	$(A_{i+1} - A_i)^+ / a_{i+1}$
$T - A_i$	0	0

Очевидно, что при $a_i \le a_{i+1}$ величины, стоящие в первом столбце этой таблицы, не превосходят величин, стоящих во втором, а при $a_i \ge a_{i+1}$ величины, стоящие во втором, не превосходят величин, стоящих в первом.

Итак, неравенства (25) доказаны.

Они позволяют из пяти величин, стоящих под знаком extr в правой части формулы (19), оставить только две, а именно: $V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1})$, $V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1})$ – при отыскании $\min\limits_{0 \le t \le T} V_i(t)$ и $V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1})$, $V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1})$ – при отыскании $\max\limits_{0 \le t \le T} V_i(t)$.

Итак, для вычисления $\min\limits_{0 \le t \le T} V_i(t)$, используя неравенства (25), имеем

$$\min_{0 \le t \le T} V_i(t) = \min[V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1}), V_i^{(4)}(x_i - x_{i+1})] = \begin{cases} V_i^{(1)}(x_i - x_{i+1}), \\ V_i^{(4)}(x_i - x_{i\ 1}), \end{cases}$$

где в последнем равенстве первая функция берется, если $a_i \le a_{i+1}$, а вторая – если $a_i \ge a_{i+1}$. Подставляя явные выражения этих функций из (20) и (23), получим

$$\min_{0 \le t \le T} V_i(t) = \begin{cases} -\min\left(n, \dfrac{(x_i - x_{i+1})^+}{a_{i+1}}\right), \text{если } a_i \le a_{i+1}; \\ -\min\left(n, \dfrac{(x_i + A_i - x_{i+1} - A_{i+1})^+}{a_i}\right), \\ \text{если } a_i \ge a_{i+1}. \end{cases}$$

Как видим, оба выражения в правой части этой формулы можно записать единой формулой (17).

Для вычисления $\max\limits_{0 \le t \le T} V_i(t)$, используя неравенства (25), имеем

$$\max_{0 \le t \le T} V_i(t) = \max[V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1}), V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1})] = \begin{cases} V_i^{(2)}(x_i - x_{i+1}), \\ V_i^{(3)}(x_i - x_{i+1}), \end{cases}$$

где в последнем равенстве первая функция берется, если $a_i \le a_{i+1}$, а вторая – если $a_i \ge a_{i+1}$. Подставляя явные выражения этих функций из (21) и (22), получим

$$\max_{0 \le t \le T} V_i(t) = \begin{cases} \min\left(n, \dfrac{(x_{i+1} + A_{i+1} - x_i - A_i)^+}{a_{i+1}}\right), \\ \text{если } a_i \le a_{i+1}; \\ \min\left(n, \dfrac{(x_{i+1} - x_i)^+}{a_i}\right), \text{если } a_i \ge a_{i+1}. \end{cases}$$

Как видим, что оба выражения в правой части этой формулы можно записать единой формулой (18).

Аналитические выражения для межоперационных заделов.

Прежде всего, получим выражение для межоперационного переходящего задела, ибо он входит слагаемым в другие виды межоперационных заделов. Для этого подставим (17) в (6):

$$P_i = \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right). \quad (26)$$

Такое выражение впервые было приведено, но без доказательства, в [4, с. 54]. Величина $x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+$, имеющаяся в числителе этой дроби, является величиной отклонения выполнения операций i и $i + 1$ от параллельно-последовательного их сочетания. Из формулы (26) видно, что межоперационный переходящий задел возникает ($P_i > 0$) только в том случае, когда это отклонение является положительным.

Далее, подставляя (26) и (16) в (4), (26) и (18) в (8), (26) и (15) в (9), получим, соответственно, следующие искомые выражения и для остальных видов межоперационных заделов (оборотного, максимального и среднего):

$$Z_i(t) = \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right) + \min\left(n, \frac{(t - x_i)^+}{a_i}\right) - \min\left(n, \frac{(t - x_{i+1})^+}{a_{i+1}}\right);$$

$$M_i = \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right) + \min\left(n, \frac{(x_{i+1} - x_i + (A_{i+1} - A_i)^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right); \quad (27)$$

$$S_i = \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right) + \frac{x_{i+1} - x_i}{r} + \frac{A_{i+1} - A_i}{2r}.$$

Графики этих межоперационных заделов P_i, M_i и S_i как функций от одной переменной (от разности $x_{i+1} - x_i$) приведены в [3, с. 50–52].

Аналитические выражения для заделов на линии в целом.

Выражение для переходящего и максимального заделов получаем подстановкой (26), (27) соответственно во вторую и третью формулы в цепочке формул (10):

$$P = \sum_{i=1}^{m-1} \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right); \quad (28)$$

$$M = \sum_{i=1}^{m-1} \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \min\left(n, \frac{(x_{i+1} - x_i + (A_{i+1} - A_i)^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right). \quad (28)$$

Выражение для среднего и оборотного заделов получаем подстановкой соответственно (28), (15) в (12) и (28), (14) в (11):

$$S = \sum_{i=1}^{m-1} \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right) + \frac{x_m - x_1}{r} + \frac{A_m - A_1}{2r},$$

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \min\left(n, \frac{(x_i - x_{i+1} + (A_i - A_{i+1})^+)^+}{\max(a_i, a_{i+1})}\right) + \min\left(n, \frac{(t - x_1)^+}{a_1}\right) - \min\left(n, \frac{(t - x_m)^+}{a_m}\right).$$

Таким образом, полученные заделы P, M, S можно брать в качестве целевых функций при построении оптимальных ПСП работы прямоточных линий. В связи с этим план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_i^*, ..., x_m^*)$ называется оптимальным, если он является допустимым (т. е. его координаты удовлетворяют неравенствам: $0 \le x_i^* \le T - A_i \quad i = 1:m$) и доставляет минимум одному из трех видов задела: $M \to \min$, $P \to \min$, $S \to \min$. Таким образом, получаются три задачи кусочно-линейного программирования. Первая из них является весьма простой и для нее можно указать достаточно широкое множество оптимальных планов [3, с. 59–61]. Для второй и третьей задач нами предложен весьма эффективный алгоритм нахождения единого оптимального решения в явном виде [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кузин, Б.И.** Оптимальное календарное планирование на поточных линиях и предметных участках [Текст] / Б.И. Кузин. – Л., 1969.

2. **Тютюкин, В.К.** К расчету оборотных средств в массовом производстве [Текст] / В.К. Тютюкин // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 5: Экономика, философия, право. – 1980. – Вып. 1. – С. 107–112.

3. **Тютюкин, В.К.** Математические методы календарного планирования [Текст] / В.К. Тютюкин. – Л., 1984.

4. **Тютюкин, В.К.** Построение оптимальных календарных планов для прямоточных линий [Текст] / В.К. Тютюкин // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 5: Экономика, философия, право. – 1988. – Вып. 1. – С. 53–62.