

УДК 621.396.98.004.1

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-162-170

## ДВЕ ФЕРРОМАГНИТНЫЕ СФЕРЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю.А. КРАСНИТСКИЙ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Рижский институт аэронавигации, г. Рига, Латвия*

В электростатике проблема двух сферических проводников изучена довольно подробно с использованием бисферических координат и имеет многочисленные приложения. В этой работе рассматривается краевая задача о двух ферромагнитных сферах, вложенных в однородную и бесконечную среду, в которой в отсутствие сфер существует однородное магнитное поле. Решение уравнения Лапласа в бисферической системе координат позволяет найти распределение потенциала и поля во всем пространстве, включая область между сферами. Используются граничные условия, состоящие в непрерывности потенциала и нормальной составляющей плотности потока индукции на поверхностях сфер. Предполагается, что сферы одинаковы, а магнитная проницаемость их материала  $\mu \gg \mu_0$ . Задачу о падении плоской электромагнитной волны на систему двух сфер, обладающую электрически малыми размерами, можно рассматривать как квазистационарную. Скалярные потенциалы, получаемые в результате решения уравнения Лапласа, представляются рядами, содержащими полиномы Лежандра. Введено понятие эффективной проницаемости системы двух сфер. Она равна выигрышу в величине потока вектора магнитной индукции через определенное сечение системы, возникающему за счет ее магнитных свойств. Получены необходимые соотношения для эффективной проницаемости, отнесенной к центральному сечению системы. Результаты могут быть использованы, в частности, при анализе влияния зазора в ферритовом сердечнике на свойства магнитной антенны.

**Ключевые слова:** бисферические координаты, решение уравнения Лапласа, магнитное поле между сферами.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача о влиянии тела определенной формы с электрически малыми размерами ( $l/\lambda \ll 1$ ), на воздействующее на него внешнее статическое поле может быть решена аналитическими методами, если только система координат, в которой переменные в уравнении Лапласа могут быть разделены, адаптирована к форме тела [1], т. е. координатные поверхности этой системы должны совпадать с поверхностью тела. В остальных случаях следует обратиться к численным вычислениям, при этом результаты точных аналитических решений могут быть использованы в качестве эталонов.

В электростатике проблема двух сферических проводников изучена довольно подробно с использованием бисферических координат и имеет многочисленные приложения. Исследования по анализу электрических полей в присутствии ансамблей сфер связаны, в частности, с теоретической проверкой закона Кулона [2], определением сил на частицах и усилением поля в коллоидных суспензиях, изучением поведения капель воды и аэрозольных частиц в электрическом поле [3–4], вычислением полей в материальных структурах со встроенными массивами тел малых электрических размеров [5] и с реакцией наноструктур на электромагнитные поля [6]. Существует много примеров [7] практического использования этих результатов, в том числе в медицине (осаждение ингаляционных аэрозолей на поверхность легких), пищевой промышленности (разработка электростатических порошковых покрытий пищевых продуктов), газоочистке и т. д. Соответствующие решения оказываются также полезными при интерпретации результатов геофизической разведки [8], поскольку они обеспечивают средства для определения некоторых параметров измеренной аномалии.

В большей части литературных источников частицы и тела малых электрических размеров моделируются в виде металлических сфер, расположенных во внешнем электрическом по-

ле. В то же время, насколько известно [5], точное аналитическое решение для магнитного поля в присутствии двух магнитных сфер в литературе отсутствует. Оно бы было полезно при использовании представления о магнитных зарядах в электродинамике и теории антенн.

В этой работе рассматривается краевая задача о двух ферромагнитных сферах, вложенных в однородную и бесконечную среду, в которой в отсутствие сфер существует однородное магнитное поле. Решение уравнения Лапласа в бисферической системе координат позволяет найти распределение потенциала и поля во всем пространстве, включая область между сферами. Рассмотрен случай, когда сферы одинаковы, а  $\mu \gg \mu_0$ . Решение имеет вид разложения по полиномам Лежандра. Вводится понятие об эффективной проницаемости системы сфер.

## ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О БИСФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим две идентичные сферы радиуса  $b$ , изготовленные из ферромагнитного материала с проницаемостью  $\mu$ . Проницаемость окружающей среды равна  $\mu_e$ . Центры сфер расположены на оси  $z$  симметрично относительно начала координат  $O$  в точках  $z = +a$  и  $z = -a$  (рис. 1). Длина касательной, проведенной из точки  $O$  к любой из сфер, равна  $c = (a^2 - b^2)^{1/2}$ .

Бисферические координаты точки наблюдения определяются равенствами (1), приведенными на рис. 1.

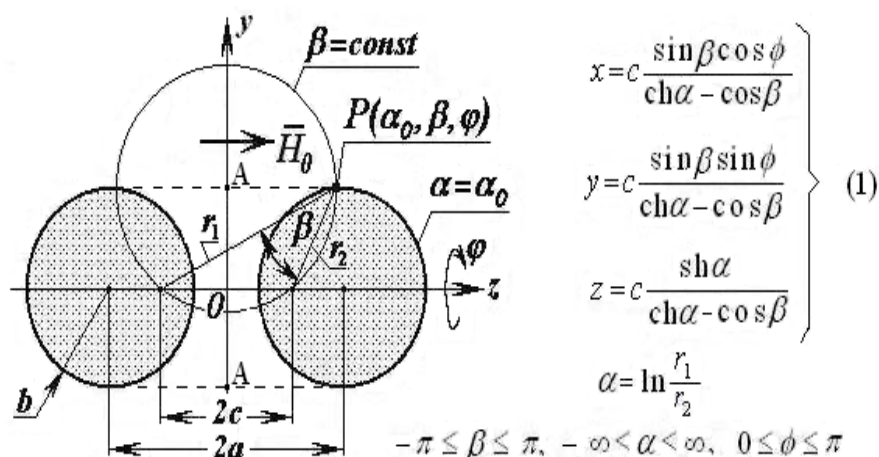


Рис. 1. Бисферическая система координат  
Fig. 1. The bispherical coordinate system

Нетрудно найти, что

$$x^2 + y^2 + (z - c \operatorname{cth} \alpha)^2 = c^2 / \operatorname{sh}^2 \alpha, \quad (2)$$

и, следовательно, поверхность  $\alpha = \operatorname{const}$  описывает сферу. Для левой сферы  $\alpha = -\alpha_0$ ; для правой  $\alpha = +\alpha_0$ .

Размеры системы сфер связаны с бисферическими координатами соотношениями

$$a = c \operatorname{cth} \alpha_0, \quad b = c / \operatorname{sh} \alpha_0. \quad (3)$$

Значениям  $\alpha = \pm \infty$  соответствуют точки  $x = y = 0, z = \pm c$ . Из (3) также следует, что когда  $\alpha_0 > 0$ , то  $a - b < c < a + b$ , и они лежат внутри левой и правой сфер соответственно.

Уравнение Лапласа в бисферических координатах имеет вид [1]

$$\nabla^2 V = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3}{c^2 \sin \beta} \left[ \sin \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin \beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \varphi} \right] = 0, \quad (4)$$

а его наиболее общее решение можно представить как потенциал

$$V = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_n e^{(n+1/2)\alpha} + B_n e^{-(n+1/2)\alpha}) [C_{nm} P_n^m(\cos \beta) + D_{nm} Q_n^m(\cos \beta)] (F_{nm} \sin m\varphi + G_{nm} \cos m\varphi). \quad (5)$$

Здесь  $P_n^m(\cos \beta)$  и  $Q_n^m(\cos \beta)$  – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Решение должно быть регулярно в плоскости  $xz$  при  $\alpha = \pi/2$ , что выполняется, если  $D_{nm} = 0$ .

Пусть внешнее поле  $H_0$  ориентировано вдоль оси  $z$  (рис. 1). Тогда магнитный скалярный потенциал  $V$  будет обладать цилиндрической симметрией относительно оси  $z$ , зависимость от  $\varphi$  исчезнет, и в (5) сохранится только член с  $m = 0$ , откуда

$$V = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{(n+1/2)\alpha} + B_n e^{-(n+1/2)\alpha}) P_n(\cos \beta). \quad (6)$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В общем случае радиусы сфер могут отличаться друг от друга. Обозначим через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  координаты поверхностей правой и левой сфер, а через  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  – потенциалы внутри них и во внешней среде соответственно.

Потенциал, обусловленный внешним полем, в отсутствие сфер равен  $V_0 = -H_0 z$ , если вектор  $H_0$  направлен в сторону возрастания  $z$ . Потенциал  $V_0$  антисимметричен относительно плоскости  $xy$  (нечетен по  $z$ , т. е. при  $z < 0$  имеем переход от  $\alpha$  к  $-\alpha$ ). Потенциалы  $V_3$  и  $V_1$ ,  $V_2$  тоже обладают этим свойством:

$$V_3(-\alpha, \beta) = -V_3(\alpha, \beta), \quad V_1(-\alpha, \beta) = -V_2(\alpha, \beta). \quad (7)$$

Для нахождения потенциала  $V_3$  во внешней области воспользуемся условием симметрии (7) и тем обстоятельством, что  $V_3 \rightarrow V_0$  при  $z \rightarrow \infty$ , откуда

$$V_3(\alpha, \beta) = -H_0 \{ z + c(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n e^{-(n+1/2)\alpha} + B_n e^{+(n+1/2)\alpha}] P_n(\cos \beta) \}, \quad (8)$$

$$\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1,$$

где вместо  $z$  можно подставить его значение из (1). Используя (7) с учетом, что  $V_1$  и  $V_2$  должны быть конечны в точках  $x = y = 0$ ,  $z = \pm c$ , где координата  $\alpha \rightarrow \pm\infty$ , получим

$$V_1(\alpha, \beta) = -H_0 [z + c(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(n+1/2)\alpha} P_n(\cos \beta)], \quad \alpha \geq \alpha_1, \quad (9a)$$

$$V_2(\alpha, \beta) = -H_0[z + c(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{(n+1/2)\alpha} P_n(\cos \beta), \quad \alpha \leq \alpha_2. \quad (9b)$$

Найденные потенциалы должны удовлетворять двум граничным условиям.

Первое состоит в непрерывности потенциала на поверхностях сфер, т. е. при  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$  должны выполняться равенства  $V_1(\alpha_1, \beta) = V_3(\alpha_1, \beta)$  и  $V_2(\alpha_2, \beta) = V_3(\alpha_2, \beta)$ , откуда

$$C_n = A_n + B_n e^{(2n+1)\alpha_1} : D_n = B_n + A_n e^{-(2n+1)\alpha_2}. \quad (10)$$

Если сферы идентичны, т. е.  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_0$  (рис. 1), то, поскольку  $C_n = -B_n(1 - e^{(2n+1)\alpha_0})$ ;  $D_n = B_n(1 - e^{(2n+1)\alpha_0})$ , получим, что

$$C_n = -D_n; A_n = -B_n. \quad (11)$$

Тогда для точек на поверхностях сфер с учетом (7) можно записать

$$V_1(\alpha_0, \beta) = -H_0[z + 2c(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sh}(n+1/2)\alpha_0 P_n(\cos \beta), \quad (12)$$

$$V_2(\alpha_0, \beta) = -V_1(-\alpha_0, \beta) = H_0[z - 2c(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sh}(n+1/2)\alpha_0 P_n(\cos \beta). \quad (13)$$

Второе условие требует непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции или же плотности магнитного потока на поверхностях сфер, откуда

$$\mu_i H_{n1}(\alpha_0, \beta) = \mu_e H_{n3}(\alpha_0, \beta) \text{ или } \mu \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad \mu = \mu_i / \mu_e. \quad (14)$$

Используя свойство двойственной перестановочности уравнений Максвелла и распространив результаты вычислений [9] на случай одинаковых сфер ( $A_n = B_n$ ) при  $\mu \gg 1$ , получим трехчленное рекурсионное соотношение

$$B_{n+1} f_{n+1}(\alpha_0, n+1, \mu) + B_n f_n(\alpha_0, n, \mu) + B_{n-1} f_{n-1}(\alpha_0, n-1, \mu) = g(\alpha_0, n, \mu) \quad (15)$$

для коэффициентов  $B_n$ , где  $f_n(\alpha_0, n, \mu)$  и  $g_n(\alpha_0, n, \mu)$  – известные функции, определяемые параметрами и расположением сфер. В нашем случае ( $A_n = B_n$ ,  $\mu \gg 1$ ) довольно трудоемкие вычисления приводят к следующим выражениям для этих функций

$$\left. \begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_0, n+1, \mu) &= 2\mu(n+1) \operatorname{sh}[\alpha_0(n+3/2)], \\ f_n(\alpha_0, n, \mu) &= -4n\{\mu\{\operatorname{sh}[\alpha_0(n+1/2)] \operatorname{ch} \alpha_0 + \frac{e^{+\alpha_0(n-1/2)}}{4n} [1 - e^{-2\alpha_0(n-1)}]\} + \\ &\quad + \operatorname{ch}[\alpha_0(n+1/2)] \operatorname{ch} \alpha_0 + \frac{1}{2n} \operatorname{ch}[\alpha_0(n+3/2)]\}, \\ f_{n-1}(\alpha_0, n-1, \mu) &= 2n\mu \operatorname{sh}[\alpha_0(n-1/2)], \\ g_n(\alpha_0, n, \mu) &= 2\sqrt{2}\mu[-ne^{-\alpha_0(n-1/2)} + (n+1)e^{-\alpha_0(n+3/2)}], \\ n &= 0, 2, 3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Система (16) неоднородных линейных уравнений неявным образом связывает коэффициенты  $B_n$  при трех последовательных значениях  $n$ . Известно, что линейные разностные уравнения 2-го порядка имеют аналитические решения, только если их коэффициенты – полиномы или по меньшей мере рациональные функции дискретной переменной  $n$ . Уравнение (15) – это линейное разностное уравнение 2-го порядка, коэффициенты которого содержат экспоненциальные функции от  $n$ , и, следовательно, его аналитическое решение невозможно. Для его достижения реализуют разные способы, в частности, основанные на теории возмущений [9, 10], а также метод укороченных рекурсионных уравнений [11, 12], метод функций Грина [13], использование асимптотик функций Лежандра [14], метод обратного разложения [15] и др.

Процесс вычислений весьма трудоемок и часто требует дополнительных расчетов. Его результаты, т. е. значения  $B_n$  в явном виде, приводятся не всегда даже для системы идеально проводящих сфер. Исключениями, в частности, служат работы [6, 15]. Согласно первой из них для одинаковых сфер имеем

$$B_n = 2^{1/2} c H_0 (2n+1) \{1 + \exp[2(n+1/2)\alpha_0]\} / \{1 - \exp[4(n+1/2)\alpha_0]\}. \quad (17)$$

Здесь  $H_0 = \text{const}$  – напряженность внешнего поля. Из свойства двойственной перестановочности уравнений Максвелла, в частности, следует, что в одной и той же системе сфер должны наблюдаться одинаковые (с точностью до масштаба) распределения электрического и магнитного потенциалов, если последовательно рассматривать проводящие сферы с  $\sigma \rightarrow \infty$ , диэлектрические сферы с  $\epsilon/\epsilon_c \rightarrow \infty$  и сферы из магнитного материала с  $\mu = \mu_i/\mu_c \rightarrow \infty$ .

Следует отметить, что с ростом  $n$  значения  $B_n$  убывают очень быстро (рис. 2).

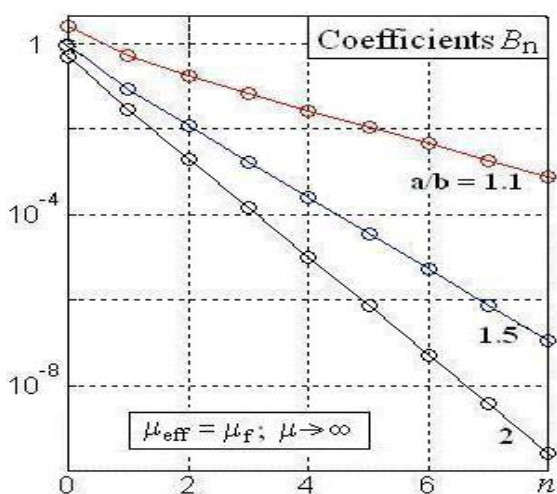


Рис. 2. Поведение коэффициентов  $B_n$  в (17)  
Fig. 2.  $B_n$  coefficient behavior in (17)

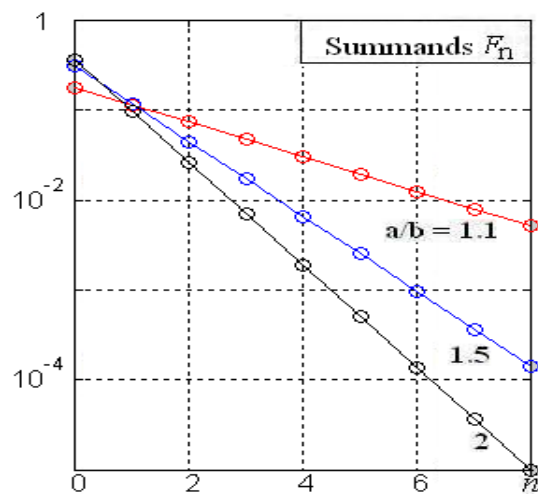


Рис. 3. Сходимость ряда (18) для потенциала  
Fig. 3. Convergence of the (18) series for the potential

Будем считать, что (17) применимо и для анализа системы сфер при  $\mu \gg 1$ . Рассмотрим распределение потенциала вдоль оси  $z$  на рис. 1, используя (8), где в случае одинаковых сфер нужно положить  $A_n = -B_n$ . Тогда

$$V_3(\alpha, \beta) = -H_0 \{z + 2c(\text{ch } \alpha - \cos \beta)\}^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \text{sh}[(n+1/2)\alpha] P_n(\cos \beta), \quad -\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0. \quad (18)$$

На рис. 3 показано, как ведут себя слагаемые ряда (18) в точке  $(0, 0, a+b)$ , лежащей на пересечении поверхности сферы с осью  $z$ , где  $\beta = 0$ , для трех значений  $\alpha_0$ .

## ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СИСТЕМЫ СФЕР

Под эффективной проницаемостью будем понимать отношение  $\mu_{\text{eff}} = \Phi/\Phi_0$ , где

$$\Phi = \int_S \bar{B}_1 d\bar{S}, \quad \Phi_0 = \int_S \bar{B}_0 d\bar{S} \quad (19)$$

– потоки векторов индукции, найденные в присутствии сфер и без них соответственно. Эта величина характеризует степень концентрации потока вектора магнитной индукции через определенное сечение  $S$  системы.

Для ее нахождения нужно вычислить значения векторов индукции  $\bar{B}_1 = \mu_i \bar{H}_1$ ,  $\bar{B}_0 = \mu_e \bar{H}_0$  в присутствии сфер и без них соответственно в центральном поперечном сечении  $S$  (на рис. 1 это круг диаметром  $AA = 2b$ , лежащий в плоскости  $xu$ , где  $\alpha = 0$ ).

Величина  $H_1$  равна  $\alpha$ -компоненте напряженности поля в сечении  $S$ . Ее легко определить через потенциал  $V_1$ . Применяв соотношение (19) из [15] к случаю одинаковых сфер, после соответствующих подстановок найдем

$$H_{1\alpha} = -\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = -\sqrt{2} H_0 (1 - \cos \beta)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{\exp[(2n+1)\alpha_0] + 1}{\exp[(2n+1)\alpha_0] - 1} P_n(\cos \beta), \quad (20)$$

где  $h_\alpha$  – коэффициент Ламэ [1]. В (19) элемент площади в сечении  $S$ , т. е. на поверхности  $\alpha = 0$ , можно представить как  $dS = c^2 \sin \beta d\beta d\varphi / (1 - \cos \beta)^2$ . Интегрирование по  $\varphi$  в (19) сводится к умножению на  $2\pi$ . Тогда поток индукции в присутствии сфер

$$\Phi = 2\sqrt{2} \pi \mu \mu_0 c^2 H_0 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(n, \alpha_0, \beta_0), \quad (21)$$

где  $\mu = \mu_i/\mu_0$  – относительная проницаемость материала сфер,  $\beta_0 = 2\arctg(c/b)$  – значения угла  $\beta$  в точках внешней границы сечения  $S$ , в том числе и в точках  $AA$  (рис. 1).

Здесь

$$T_n(n, \alpha_0, \beta_0) = -(2n+1) \frac{\exp[(2n+1)\alpha_0] + 1}{\exp[(2n+1)\alpha_0] - 1} \int_{\beta_0}^{\pi} \frac{\sin \beta P_n(\cos \beta) d\beta}{(1 - \cos \beta)^{1/2}} = D_n(n, \alpha_0) \int_{-1}^{X_0} \frac{P_n(X) dX}{(1 - X)^{1/2}}, \quad (22)$$

где  $D_n(n, \alpha_0) = (2n+1) \{ \exp[(2n+1)\alpha_0] + 1 \} / \{ \exp[(2n+1)\alpha_0] - 1 \}$ ,  $X = \cos \beta$ ,  $X_0 = \arccos \beta_0$ .

Поток в отсутствие сфер пропорционален площади круга с радиусом  $b$ , т. е.  $\Phi_0 = \pi b^2 \mu_0 H_0$ . Таким образом, эффективная проницаемость системы из двух одинаковых сфер описывается бесконечным рядом

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\Phi}{\Phi_0} = 4\mu \frac{c^2}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(n, \beta_0). \quad (23)$$

Скорость сходимости рядов в выражениях, приведенных выше, вообще говоря, зависит от геометрических параметров системы сфер. Поэтому в некоторых случаях, в частности при малых величинах зазоров между сферами, когда  $c/b \rightarrow 1$ , следует провести дополнительное ис-

следование по определению разумного числа членов в соответствующих рядах, необходимого для достижения желаемой точности вычислений.

Эффективная проницаемость может служить удобным показателем степени искажений поля при внесении в него отдельного тела или системы тел. Она позволяет оценить выигрыш в величине потока магнитной индукции через центральное сечение системы, реализуемый при заданных геометрии и свойствах материала тела (тел). С другой стороны, по ней можно судить о степени использования этих свойств.

Выше значение  $\mu_{eff}$  получено для случая  $\mu \gg 1$ . Поэтому можно предположить, что величину (23) допустимо рассматривать как некую оценку проницаемости формы

$$\mu_f = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu_{eff} \quad (24)$$

системы двух идентичных сфер, т. е. предельно достижимого значения эффективной проницаемости при заданной геометрии системы. Располагая зависимостью  $\mu_{eff}(\mu)$  для заданных размеров системы, легко найти такое значение проницаемости материала, дальнейшее увеличение которой уже не будет приводить к росту величины  $\mu_{eff}$ .

С физической точки зрения предельный переход  $\mu \rightarrow \infty$  эквивалентен превращению материала сфер в идеальный магнетик, на поверхности которого тангенциальные составляющие  $H_\varphi$  и  $H_\beta$ , становятся равными нулю. Таким образом, структура поля во внешней области будет определяться единственной составляющей  $H_\alpha = -\text{grad}V_{1,2}$ , нормальной к поверхностям сфер. Помня о принципе двойственной перестановочности уравнений Максвелла, иллюстрации структур полей в системе двух сфер для некоторых частных случаев можно найти в [9].

## НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Рассмотрим приемную ферритовую антенну, в простейшем случае содержащую цилиндрический сердечник из материала с высокой  $\mu$  и малыми потерями и размещенную на нем соленоидальную обмотку [16]. При настройке цепи антенны в резонанс на вход приемника поступает напряжение  $U_A = e_A Q_A$ , где  $Q_A$  – добротность антенного контура,  $e_A$  – ЭДС, наводимая в антенне падающей электромагнитной волной. Известно, что  $Q_A = W_A/P_A$ , т. е. представляет собой отношение энергии, запасенной в системе, к энергии, теряемой в ней, за один период колебаний.

Экспериментально установлено, что при наличии зазора в сердечнике добротность увеличивается. Качественное объяснение этого факта заключается в возрастании реактивной энергии, запасаемой в системе, при сохранении практически неизменными потерь. Математическое же обоснование в известной литературе отсутствует. Соотношения, полученные выше, позволяют провести количественные расчеты и промоделировать влияние зазора на характеристики антенны.

2. С увеличением радиуса окружности  $AA$  (рис. 1) ее площадь  $S$  быстро растет, а напряженность  $H_z$ , усредненная по этой площади, уменьшается. Поэтому можно предположить, что магнитный поток через эту окружность при некотором значении ее радиуса достигает максимума.

Подробные исследования указанных вопросов выходят за рамки данной работы.

## ВЫВОДЫ

Задачу о падении плоской электромагнитной волны на систему двух сфер, обладающую электрически малыми размерами, можно рассматривать как квазистационарную. Скалярные потенциалы, получаемые в результате решения уравнения Лапласа, представляются рядами, содержащими полиномы Лежандра. Оценки показывают, что при  $\mu \gg 1$  сходимость этих рядов зависит от

геометрических размеров системы. При практических расчетах это может привести к необходимости дополнительных исследований с целью определения нужного числа слагаемых в этих рядах.

Введено понятие эффективной проницаемости системы двух сфер. Она равна выигрышу в величине потока вектора магнитной индукции через определенное сечение системы, возникающему за счет ее магнитных свойств. Получены необходимые соотношения для эффективной проницаемости, отнесенной к центральному сечению системы. Результаты могут быть использованы, в частности, при анализе влияния зазора в ферритовом сердечнике на свойства магнитной антенны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИИЛ, 1960. 886 с.
2. Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров К.А. К оценке погрешности опыта Кулона // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2007. № 1. С. 88–95.
3. Hall W.D., Beard K.V. Electrostatic force between a conducting sphere and a dielectric sphere // Birkhäuser. Basel: Verlag, 1975. Vol. 113. Pp. 515–524.
4. Grover S.N. The electrostatic force between a conducting sphere and a charged dielectric sphere in arbitrarily oriented external electric field // Birkhäuser. Basel: Verlag, 1976. Vol. 114. Pp. 521–539.
5. Ciric I.R., Kotuwage Kumara S.C.M. Benchmark solutions for magnetic fields in the presence of two superconducting spheres // Materials Sci. Forum. Switzerland: Trans Tech Publications, 2012. Vol. 721. Pp. 21–26.
6. Electrostatics and its effect on spatial distribution of tunnel current in metal Nanocrystal flash memories / A. Nainani, A. Roy, P.K. Singh etc. // ICMTD-2007. Pp. 251–254.
7. Electrostatic force between a charged sphere and a planar surface: A general solution for dielectric materials / A. Khachatourian, Ho-Kei Chan, A.J. Stace, E. Bichoutskaia // J. Chem. Phys. 2014. Vol. 140, No. 7. 074107–1–074107–10.
8. Aldridge D.F., Oldenburd W. Direct current electric potential field associated with two spherical conductors in a whole-space // Geophysical Prospecting. 1989. Vol. 37, No. 3. Pp. 311–330.
9. Stoy R.D. Solution procedure for the Laplace equation in bispherical coordinates for two spheres in a uniform external field: Parallel orientation // J. Appl. Phys. 1989. Vol. 65. Pp. 2611–2615.
10. Goyette A., Navon A. Two dielectric spheres in an electric field // Phys. Rev. B. 1976. Vol. 13, No. 10. Pp. 4320–4327.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Краснитский Юрий Александрович**, доктор технических наук, профессор Рижского института аэронавигации, krasn@tsi.lv.

## TWO FERROMAGNETIC SPHERES IN HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

**Yuriy A. Krasnitsky<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Riga Aeronautical Institute, Riga, Latvia*

### ABSTRACT

The problem of two spherical conductors is studied quite in detail with bispherical coordinates usage and has numerous appendices in an electrostatics. The boundary-value problem about two ferromagnetic spheres enclosed on homogeneous and infinite environment in which the lack of spheres exists like homogeneous magnetic field is considered. The solution of



Laplace's equation in the bispherical system of coordinates allows us to find the potential and field distribution in all spaces, including area between spheres. The boundary conditions in potential continuity and in ordinary density constituent of spheres surfaces induction flux are used. It is supposed that spheres are identical, and magnetic permeability of their material is expressed in  $\mu \gg \mu_0$ . The problem about falling of electromagnetic plane wave on the system of two spheres, which possesses electrically small sizes, can be considered as quasistationary. The scalar potentials received as a result of Laplace's equation solution are represented by the series containing Legendre polynomials. The concept of two spheres system effective permeability is introduced. It is equal to the advantage in magnitude of magnetic induction flux vector through a certain system's section arising due to its magnetic properties. Necessary ratios for the effective permeability referred to the central system's section are obtained. Particularly, the results can be used during the analysis of ferroxcube core clearance, which influences on the magnetic antenna properties.

**Key words:** bispherical coordinates, the solution of Laplace's equation, magnetic field between spheres.

## REFERENCES

1. **Morse F. M., Feshbach G.** *Metody teoreticheskoy fiziki* [Methods of theoretical physics]. Vol. 2. M.: IIL, 1960, 886 p. (in Russian)
2. **Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A.** *K otsenke pogreshnosti opyta Kulona* [To estimate the error of the experience of the pendant]. *Vestnik MGTU im. Baumana. Seriya "Estestvenniye nauki"* [Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series "Natural Sciences"], 2007, no. 1, pp. 88–95. (in Russian)
3. **Hall W.D., Beard K.V.** Electrostatic force between a conducting sphere and a dielectric sphere. Birkhäuser. Basel: Verlag, 1975, vol. 113, pp. 515–524.
4. **Grover S.N.** The electrostatic force between a conducting sphere and a charged dielectric sphere in arbitrarily oriented external electric field. Birkhäuser. Basel: Verlag, 1976, vol. 114, pp. 521–539.
5. **Ciric I.R., Kotuwage Kumara S.C.M.** Benchmark solutions for magnetic fields in the presence of two superconducting spheres. Materials Sci. Forum, Switzerland: Trans Tech Publications, 2012, vol. 721, pp. 21–26.
6. **Nainani A., Roy A., Singh P.K., Mukhopadhyay G., Vasi J.** Electrostatics and its effect on spatial distribution of tunnel current in mental Nanocrystal flash memories. ICMTD-2007, pp. 251–254.
7. **Khachatourian A., Chan Ho-Kei, Stace A.J., Bichoutskaia E.** Electrostatic force between a charged sphere and a planar surface: A general solution for dielectric materials. J. Chem. Phys, 2014, vol. 140, no. 7, 074107–1–074107–10.
8. **Aldridge D.F., Oldenburdg W.** Direct current electric potential field associated with two spherical conductors in a whole-space. Geophysical Prospecting, 1989, vol. 37, no. 3, pp. 311–330.
9. **Stoy R.D.** Solution procedure for the Laplace equation in bispherical coordinates for two spheres in a uniform external field: Parallel orientation. J. Appl. Phys., 1989, vol. 65, pp. 2611–2615.
10. **Goyette A., Navon A.** Two dielectric spheres in an electric field. Phys. Rev. B., 1976, vol. 13, no. 10, pp. 4320–4327.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Yury A. Krasnitsky**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Riga Aeronautical Institute, krasn@tsi.lv.

Поступила в редакцию  
Принята в печать

09.09.2017  
14.03.2018

Received  
Accepted for publication

09.09.2017  
14.03.2018