

Точное аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения для случая малых колебаний физического маятника

Галимбеков Айрат Дамирович,

доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Теплоэнергетики и физики», ФГБОУ ВО «Башкирский государственный аграрный университет», airbek@yandex.ru

В данной работе найдено точное аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения для случая малых колебаний физического маятника. При решении нелинейного дифференциального уравнения автор использовал собственно разработанный им метод. В статье проведен анализ полученного решения и сделаны выводы. В частности, практически во всех работах, где рассматривается решение приближенными методами, делается вывод, что колебания являются изохронными (то есть их частота и период зависят от амплитуды колебания). В статье из точного аналитического решения для малых колебаний физического маятника следует, что эти выводы не верны, и колебания являются изохронными, то есть, нелинейность не влияет на частоту и период колебаний. Основной вклад нелинейности приходится на форму движения физического маятника: вершины становятся более плоскими. Ключевые слова: физический маятник, нелинейные колебания, нелинейное дифференциальное уравнение.

Решение нелинейных дифференциальных уравнений является довольно сложной и трудоемкой задачей. Для многих, даже простейших нелинейных дифференциальных уравнений до сих пор не найдены точные аналитические решения. Это объясняется тем, что в обход нахождения точных аналитических решений разработаны другие приближенные методы, например, метод последовательных приближений [1, с.112-116], метод возмущения [2, с.224], метод разложения в ряд по параметру нелинейности, метод Линштедта-Пуанкаре [3, с.136-139], а также численные методы исследования с помощью вычислительной техники, которые позволяют найти приближенные решения нелинейных дифференциальных уравнений и проанализировать общие закономерности, связанные с нелинейностью. Но эти методы обладают теми или иными недостатками, и поэтому поиск точных решений является актуальной задачей, так как позволяют глубже проанализировать эффекты, связанные с нелинейностью.

В данной работе найдено точное аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения для малых колебаний физического маятника и проведен анализ полученных решений.

Как известно свободные колебания физического маятника описываются дифференциальным уравнением вида [4, с.257]:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0,$$

где α - угол отклонения маятника от положения равновесия; ω_0 - собственная круговая частота колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}},$$

m - масса тела, g - ускорение сво-

бодного падения, l - расстояние от точки подвеса до центра масс тела, J - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Точка означает производную по времени t , т.е.

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

В случае малых колебаний, когда угол отклонения α удовлетворяет условиям $|\alpha| < 1$, тогда синус можно разложить по малому параметру α :

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{120} \alpha^5 - \dots$$

Учитывая два первых члена разложения, получим нелинейное дифференциальное уравнение для физического маятника в виде:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha - \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3 = 0. \quad (1)$$

В работах [2, с. 224-227], [3, с.136-139] решение дифференциального уравнения (1) получено приближенными методами (методом возмущения, методом разложения в ряд по параметру нелинейности, методом Линшtedта-Пуанкаре), и показано, что нелинейность влияет на круговую частоту и период колебаний и являются неизохронными (то есть их период зависит от амплитуды колебания). Из полученного нами точного аналитического решения дифференциального уравнения (1) следует, что эти выводы не верны, и колебания являются изохронными, то есть, нелинейность не влияет на частоту и период колебаний, а влияет только на форму колебаний.

Приступим к решению. Умножим (1) на дифференциал $d\alpha$:

$$\ddot{\alpha} d\alpha + \omega_0^2 \alpha d\alpha - \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3 d\alpha = 0,$$

Далее учтем, что $d\alpha = \dot{\alpha} dt$, откуда

$$\ddot{\alpha} d\alpha = \ddot{\alpha} \dot{\alpha} dt = \dot{\alpha} d\dot{\alpha} = d\left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2}\right), \text{ где учтено, что}$$

$$d\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} dt. \text{ Так же учтем, что } \alpha d\alpha = d\left(\frac{\alpha^2}{2}\right),$$

$$\alpha^3 d\alpha = d\left(\frac{\alpha^4}{4}\right),$$

откуда

$$d\left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2}\right) + \omega_0^2 d\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\omega_0^2}{6} d\left(\frac{\alpha^4}{4}\right) = 0,$$

или

$$d\dot{\alpha}^2 + \omega_0^2 d\alpha^2 - \frac{\omega_0^2}{12} d\alpha^4 = 0,$$

интегрируя, имеем

$$\dot{\alpha}^2 + \omega_0^2 \alpha^2 - \frac{\omega_0^2}{12} \alpha^4 + C = 0,$$

где C - постоянная интегрирования, положим $C = 0$, откуда имеем

$$\dot{\alpha}^2 + \omega_0^2 \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{12} \alpha^2\right) = 0.$$

Данное уравнение можно представить в виде:

$$\left(\dot{\alpha} + i\omega_0 \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}\right) \left(\dot{\alpha} - i\omega_0 \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}\right) = 0,$$

где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Таким образом, получаем два уравнения

$$\left(\dot{\alpha} - i\omega_0 \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}\right) = 0, \quad (2)$$

$$\left(\dot{\alpha} + i\omega_0 \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}\right) = 0. \quad (3)$$

Решим уравнение (2),

$$\frac{d\alpha}{dt} = i\omega_0 \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2},$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}} = i\omega_0 dt,$$

интегрируя, получим

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}} = i\omega_0 t + C, \quad (4)$$

где C - постоянная интегрирования.

Рассмотрим интеграл: $\int \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}}$, делая замену $y = \sqrt{\frac{1}{12}} \alpha$, преобразуем интеграл к виду

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}} = \int \frac{dy}{y \sqrt{1 - y^2}}.$$

Данный интеграл найден в работах [5, с. 935], [6, с. 49]:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}} \right|$$

и, таким образом, (4) перепишется в виде:

$$\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{12}} \alpha}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}} \right| = i\omega_0 t + C. \quad (5)$$

В правой части уравнения стоит комплексное число, поэтому появляется необходимость обобщения натурального логарифма на область комплексных чисел. Для этого рассмотрим логарифмическую функцию $y = \ln x$, где x и y являются комплексными числами, т.е. $x = \operatorname{Re} x + i \operatorname{Im} x$, $y = \operatorname{Re} y + i \operatorname{Im} y$. Для определения свойств воспользуемся формулой Эйлера:

$$x = \exp(y) = \exp(\operatorname{Re} y + i \operatorname{Im} y) = \exp(\operatorname{Re} y) \exp(i \operatorname{Im} y) = \exp(\operatorname{Re} y) (\cos(\operatorname{Im} y) + i \sin(\operatorname{Im} y))$$

откуда

$$\operatorname{Re} x = \exp(\operatorname{Re} y) \cos(\operatorname{Im} y),$$

$$\operatorname{Im} x = \exp(\operatorname{Re} y) \sin(\operatorname{Im} y),$$

таким образом, область определения x

$$-\exp(\operatorname{Re} y) \leq \operatorname{Re} x \leq \exp(\operatorname{Re} y),$$

$$-\exp(\operatorname{Re} y) \leq \operatorname{Im} x \leq \exp(\operatorname{Re} y),$$

где было учтено, что

$$-1 \leq \cos(\operatorname{Im} y) \leq 1, \quad -1 \leq \sin(\operatorname{Im} y) \leq 1.$$

Таким образом, в уравнении (5), в случае комплексных чисел в натуральном логарифме нет необходимости накладывать, какие либо, ограничения на область определения для комплексного числа x , поэтому убираем знак модуля и перепишем уравнение (5) в виде:

$$\ln \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{12}} \alpha}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}} \right) = i \omega_0 t + \ln C_1,$$

где приняли $C = \ln C_1$, далее потенцируя, получим

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{12}} \alpha}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}} \right) = C_1 \exp(i \omega_0 t),$$

постоянную найдем из начальных условий: в начальный момент времени при $t=0$ маятник был отклонен на начальный угол $\alpha = \alpha_0$:

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{12}} \alpha_0}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}} \right) = C_1,$$

откуда получим трансцендентное уравнение:

$$\frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2}} = \frac{\alpha_0 \exp(i \omega_0 t)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}},$$

преобразуем к виду:

$$\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2} \right) \alpha = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha^2} \right) \alpha_0 \exp(i \omega_0 t)$$

Делаем замену

$$z = 1 - \frac{1}{12} \alpha^2, \quad (6)$$

откуда с учетом замены

$$\alpha = \sqrt{12} \sqrt{1 - z}, \quad (7)$$

имеем

$$\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2} \right) \sqrt{12} \sqrt{1 - z} = (1 + \sqrt{z}) \alpha_0 \exp(i \omega_0 t)$$

Учитывая, что

$$1 - z = (1 + \sqrt{z})(1 - \sqrt{z}),$$

$$\sqrt{1 - z} = \sqrt{(1 - \sqrt{z})(1 + \sqrt{z})}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{\alpha_0 \exp(i \omega_0 t)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2} \right)}.$$

Обозначим

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{\alpha_0 \exp(i \omega_0 t)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2} \right)}, \quad (8)$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}}} = \beta, \quad \frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} = \beta^2,$$

$$1 - \sqrt{z} = \beta^2 (1 + \sqrt{z}),$$

$$1 - \beta^2 = \sqrt{z} (1 + \beta^2), \quad z = \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \right)^2,$$

С учетом замены (6), (7) и обозначения (8)

$$\alpha = \sqrt{12} \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \right)^2} = \sqrt{12} \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2} \right) = \frac{2\alpha_0 \exp(i \omega_0 t)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2} \right) \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\alpha_0^2 \exp(2i \omega_0 t)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2} \right)^2} \right)}$$

и, таким образом, решение уравнения (2) имеет вид:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0 \exp(i\omega_0 t)}{1 + \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2 (\exp(2i\omega_0 t) - 1)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)}}$$

Проводя аналогичные расчеты, находим решение уравнения (3):

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0 \exp(-i\omega_0 t)}{1 + \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2 (\exp(-2i\omega_0 t) - 1)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)}}$$

то есть, $\alpha_1 = \alpha_2^*$ (звездочка означает операцию комплексного сопряжения) решения являются комплексно сопряженными и, таким образом, реальные части обоих решений совпадают. Далее выделим реальную часть

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_1^*}{2} = \frac{\alpha_2^* + \alpha_2}{2} :$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \exp(i\omega_0 t)}{2 \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} + \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2 \exp(2i\omega_0 t)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)}\right)} + \frac{\alpha_0 \exp(-i\omega_0 t)}{2 \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} + \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2 \exp(-2i\omega_0 t)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)}\right)}$$

Обозначим $s = 1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)}$ и

$$d = \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)}, \text{ причем } s + d = 1, \text{ тогда}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0 ((s + d \exp(-2i\omega_0 t)) \exp(i\omega_0 t) + (s + d \exp(2i\omega_0 t)) \exp(-i\omega_0 t))}{2(s + d \exp(2i\omega_0 t))(s + d \exp(-2i\omega_0 t))} = \frac{\alpha_0 \cos(\omega_0 t)}{s^2 + 2sd \cos(2\omega_0 t) + d^2}$$

где учтено, что

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2},$$

$$\cos(2\omega_0 t) = \frac{\exp(2i\omega_0 t) + \exp(-2i\omega_0 t)}{2}, \quad s + d = 1.$$

Рассмотрим знаменатель

$$\begin{aligned} s^2 + 2sd \cos(2\omega_0 t) + d^2 &= 1 - \frac{1}{12} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} + \left(\frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{12} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \right) \cos(2\omega_0 t) + \left(\frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \right)^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{12} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \right) (1 - \cos(2\omega_0 t)) = \\ &= 1 - \frac{1}{6} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \right) \sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

где учтено, что $(1 - \cos(2\omega_0 t)) = 2 \sin^2(\omega_0 t)$ и, таким образом, окончательное решение имеем в виде:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \cos(\omega_0 t)}{1 - \frac{1}{6} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \right) \sin^2(\omega_0 t)} \quad (9)$$

Проанализируем полученное решение. Для анализа введем обозначение

$$B = \frac{1}{6} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\alpha_0^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{12} \alpha_0^2}\right)} \right), \quad (10)$$

тогда (9) перепишем в виде:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \cos(\omega_0 t)}{1 - B \sin^2(\omega_0 t)},$$

найдем экстремальные точки

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d(\omega_0 t)} &= \frac{d}{d(\omega_0 t)} \left(\frac{\alpha_0 \cos(\omega_0 t)}{1 - B \sin^2(\omega_0 t)} \right) = - \frac{\alpha_0 \sin(\omega_0 t)}{1 - B \sin^2(\omega_0 t)} + \\ &+ \frac{2\alpha_0 B \sin(\omega_0 t) \cos^2(\omega_0 t)}{(1 - B \sin^2(\omega_0 t))^2} = \\ &= - \frac{\alpha_0 \sin(\omega_0 t) (1 - B \sin^2(\omega_0 t) - 2B \cos^2(\omega_0 t))}{(1 - B \sin^2(\omega_0 t))^2} = \\ &= - \frac{\alpha_0 \sin(\omega_0 t) (1 - B - B \cos^2(\omega_0 t))}{(1 - B \sin^2(\omega_0 t))^2} = 0 \end{aligned}$$

откуда имеем два уравнения определяющие точки экстремума:

$$\sin(\omega_0 t) = 0,$$

причем $\omega_0 t = \pi n$, где $n=0,1,2,\dots$ и

$$\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1 - B}{B},$$

которое не имеет решений, если $\frac{1-B}{B} > 1$, когда $0 < B < \frac{1}{2}$ и имеет решения, если $0 \leq \frac{1-B}{B} \leq 1$, когда $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

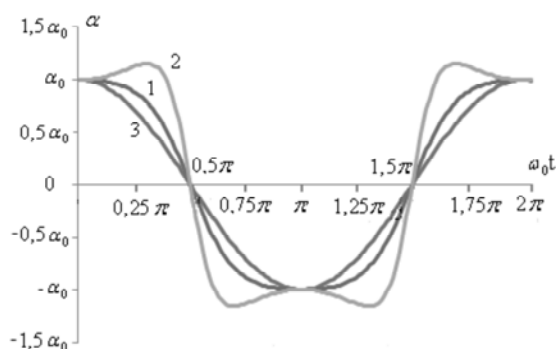


Рисунок 1.

На рисунке 1, изображены кривые 1, 2 и 3, где по оси абсцисс - фаза колебаний $\omega_0 t$, а по оси ординат – угол отклонения маятника α .

Кривая 1 - соответствует случаю, когда $0 < B < \frac{1}{2}$ и для определенности взято $B = 0,4$. Кривая имеет максимумы в точках $\omega_0 t = \pi n$, где $n=0,2,4...$ и минимумы в точках $\omega_0 t = \pi m$, где $m=1,3,5...$. Кривая 1 описывает периодические колебания частота и период которых соответственно равны $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$ и $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Кривая 2 - соответствует случаю, когда $\frac{1}{2} < B < 1$ и для определенности взято $B = 0,75$.

На кривой появляются дополнительные максимумы и минимумы из решения уравнения $\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{3}$. Понятно, что кривая 2 не имеет физического смысла, действительно, при начальном отклонении физического маятника на начальный угол α_0 маятнику не хватит потенциальной энергии, чтобы дополнительно подняться на более высокий максимум. Действительно, оценка параметра B , определяемого выражением (10) показывает, что максимальное значение, которое он имеет при максимальном допустимом угле отклонения $\alpha_0 = 1$ равно

$B_{max} = 0,0885$, то есть удовлетворяет условию $0 < B_{max} < \frac{1}{2}$ и, таким образом, случай описываемый кривой 2 для малых колебаний не реализуется.

Кривая 3-соответствует линейному физическому маятнику, который описывается уравнением: $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$, когда учитывается только первый член разложения синуса, и решение имеет вид $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t)$. Для того, чтобы нагляднее продемонстрировать, как нелинейность влияет на характер движения, сравним кривые 1 и 3. Откуда видим, что нелинейность влияет, только на форму движения маятника (вершины становятся более плоскими), а на частоту и период не влияет. Следует также отметить, что для кривой

2, для определенности выбран параметр $B = 0,4$, что намного больше максимально допустимого значения $B_{max} = 0,0885$, и если сравнивать кривую 3 с кривой с параметром $B_{max} = 0,0885$, то кривые несущественно отличаются друг от друга.

Таким образом, делаем выводы, что в случае малых колебаний $|\alpha| < 1$:

1. Нелинейность не влияет на частоту $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$ и на период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, и являются изохронными.

2. Нелинейность влияет только на форму движения маятника.

Литература

- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теоретическая физика: Учебное пособие. – В 10-и т. Т. 1. Механика. – 4-е изд., испр.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.-216 с.
- Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (Берклиевский курс физики, т. 1), М., Наука, 1971. – 480 с.
- Кузнецов А.И., Кузнецов С.И., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов. - М: Издательство физико-математической литературы, 2002. - 292 с.
- Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов.-11-е изд. стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2006.-560 с.
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.- 800 с.
- Г. В. Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы.- М.: Наука. Главная

редакция физико-математической литературы, 1978.- 228 с.

The exact analytical solution of the nonlinear differential equation for the case of small fluctuations of the physical pendulum

Galimbekov A.D.

Bashkir state agricultural university

In this work the exact analytical solution of the nonlinear differential equation for a case of small fluctuations of the physical pendulum is found. At the solution of the nonlinear differential equation the author used the method which is actually developed by him. In article the analysis of the received decision is carried out and conclusions are drawn. In particular, practically in all works where the decision is considered by approximate methods, the conclusion is drawn that fluctuations are not isochronous (that is their frequency and the period depends on fluctuation amplitude). In article for small fluctuations of the physical pendulum follows from the exact analytical decision that these conclusions aren't right, and fluctuations are isochronous, that is, nonlinearity doesn't influence the frequency and the period of fluctuations. The main contribution of nonlinearity is the share of form of motion of the physical pendulum: tops become more flat.

Keywords: physical pendulum, nonlinear fluctuations, nonlinear differential equation.

References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. theoretical physics: Manual. – In 10 t. T. 1. Mechanics. – 4 prod., испр. - M.: Science. Hl. physical edition. - a mat. litas., 1988.-216 pages.
2. Single-breasted coat Ch., Knight U., Ruderman M. Mechanics (Berklijevsky course of physics, t. 1), M., Science, 1971. – 480 pages.
3. Kuznetsov A.I., Kuznetsov S.I., Ryskin N.M. Nonlinear fluctuations: Studies. a grant for higher education institutions. - M: Publishing house of physical and mathematical literature, 2002. - 292 pages.
4. Trofimova T.I. Physics course: manual for higher education institutions. - the 11th prod. I have erased. - M.: Publishing center "Akademiya", 2006.-560 pages.
5. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and ranks. – M.: Science. Main edition of physical and mathematical literature, 1981. - 800 pages.
6. G.V. Dvayt. Tables of integrals and other mathematical formulas. - M.: Science. Main edition of physical and mathematical literature, 1978. - 228 pages.