УДК 330.4:368

Реннер А.Г., Ленерт А.Г.
Оренбургский государственный университет
E_mail: mme@mail.osu.ru

О СТРУКТУРЕ ИНВЕСТИРОВАНИЯ КАПИТАЛА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В БЕЗРИСКОВЫЕ АКТИВЫ

Исследована вероятность неразорения страховой компании, инвестирующей собственный капитал в безрисковые активы. В предположении об обобщенном характере плотности распределения размера выплат выявлена структура инвестирования капитала страховой компании в безрисковые активы.

Ключевые слова: вероятность неразорения, безрисковые активы, инвестирование, дельта-функция Дирака.

Усиливающаяся среди страховых компаний конкуренция и увеличение рисков, обусловленных мировым финансовым кризисом, выдвигают высокие требования как к оценке платежеспособности страховых компаний, так и к исследованиям характеристик влияния на нее.

В работах Х. Крамера [1, 2], Ф. Лундберга [3, 4], А.В. Мельникова [5, 6] и других исследовалось влияние на платежеспособность размера начального капитала с учетом его инвестирования в безрисковые и рисковые активы. Но в приведенных выше исследованиях делаются достаточно жесткие допущения относительно характера распределения размеров выплат.

В работе [7] предлагается для построения численно-аналитического решения в модели Крамера-Лундберга аппроксимировать плотность распределения размера выплат обобщенным рядом Фурье по системе функций, допускающих преобразование Лапласа. Тем же автором в работе [8] предлагается искать вероятность неразорения страховой компании, в модели с инвестированием собственного капитала в безрисковые активы, в классе обобщенных функций, точнее обобщенной бралась плотность распределения размера выплат, но не удалось дать содержательную интерпретацию полученного результата.

Итак, рассмотрим модель вероятности неразорения страховой компании с пуассоновским потоком исков и с инвестированием средств компании в безрисковые активы.

Пусть N(t) – пуассоновский случайный процесс с параметром λ, число исков на [0; t];

λ – интенсивность пуассоновского процесса поступления исков;

X_i – определяет выплату по иску на промежутке [0; t];

$Y_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, – капитал страховой компании в момент времени t;

$\psi(u)=P\{Y_t \geq 0, Y_0 = u, t \geq 0\}$ – вероятность неразорения;

u – начальный капитал;

r – процентная ставка;

c – интенсивность поступления страховых премий.

В случае, если страховая компания размещает свой капитал на банковском счете, вероятность неразорения может быть получена как решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \lambda\psi(u) = \psi'(u)(ru + c) + \lambda\int_0^u \psi(u - x) f(x)dx \\ \psi(\infty) = 1 \end{cases}. \quad (1)$$

Применяя преобразование Лапласа к интегро-дифференциальному уравнению, получим:

$$\Phi(p)\lambda = -r(p\Phi(p) - \psi(0))' + c(p\Phi(p) - \psi(0)) + \lambda\Phi(p)D(p),$$

$$\Phi'(p) + \frac{\lambda + r - cp - \lambda D(p)}{rp}\Phi(p) = -\frac{c\psi(0)}{rp}, \quad (2)$$

где $\Phi(p) = L(\psi(u)); D(p) = L(f(x))$,

$$\varphi(p) = \frac{\lambda + r - cp - \lambda D(p)}{rp};$$

$$g(p) = -\frac{c\psi(0)}{rp}.$$

Решение уравнения (2) может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \Phi(p) = \exp(-G(p)) * (\eta + \int_{\xi}^{p} g(s) * \exp(G(s))ds) \\ \lim\limits_{p \to \xi} \Phi(p) = \eta \end{cases}, \quad (3)$$

где $G(p) = \int_{\xi}^{p} \frac{\lambda + r - cs - \lambda D(s)}{rs} ds$

Учитывая теоремы о предельных значениях оригинала и изображения

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = \lim_{p \to 0} p\Phi(p) = 1$$

$$\lim_{u \to 0} \psi(u) = \lim_{p \to \infty} p\Phi(p) \le 1,$$

положим

$$\lim_{p \to \infty} \Phi(p) = 0.$$

Тогда из (3) следует

$$\Phi(p) = \exp(-\int_{\infty}^{p} \varphi(s)ds) * \int_{\infty}^{p} (-\frac{c\psi(0)}{rs} * \exp((\int_{\infty}^{s} \frac{\lambda + r - ct - \lambda D(t)}{rt} dt)ds),$$

$$\Phi(p) = \int_{\infty}^{p} (-\frac{c\psi(0)}{rs} * \exp(\int_{p}^{s} \lambda \frac{\frac{\lambda + r}{\lambda} - \frac{ct}{\lambda} - D(t)}{rt} dt))ds. \quad (4)$$

Для обеспечения сходимости несобственного интеграла в выражении (4) необходимо наложить некоторые ограничения (гарантирующие восстановление оригинала *ш(u))* на обобщенную плотность распределения размера выплат:

$$f(x) = (\delta(x) - \frac{r}{\lambda}\tilde{f}(x)) + \frac{r}{\lambda}\delta(x), \quad (5)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $\tilde{f}(x)$ – регулярная часть плотности распределения, оцениваемая по статистическим данным с помощью обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных функций, допускающих преобразования Лапласа.

В выражении (5) первое слагаемое $\delta(x) - \frac{r}{\lambda}\tilde{f}(x)$ обобщенной плотности характеризует ту часть капитала компании, которую можно инвестировать в безрисковые активы. Второе слагаемое $\frac{r}{\lambda}\delta(x)$ обобщенной плотности в выражении (5) характеризует ту часть капитала компании, которая предназначена для выплат по образовавшимся в начальный момент искам.

Таким образом, мы одновременно установили структуру инвестиций средств страховой компании.

05.05.2012

Список литературы:
1. Cramer, H. Collective Risk Theory // Jubilee Volume of F. Scandia, 1955.
2. Cramer, H. On the Mathematical Theory of Risk // Skandia Jubilee Volume, Stockholm Centraltryckeriet, 1930 / Reprinted in: Harald Cramer Collective works, ed. by A. Martin-Lof. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – Vol. 1. – P. 601–678.
3. Lundberg, F. Approximerad Framstallning av Sannolikhetsfunktionen. Aterforsakring av Kollektivrisker (PhD thesis) // Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1903. – 53 p.
4. Lundberg, F. FцrsДkringsteknisk RiskutjДmning // F. Englunds Boktryckeri – A.B., Stockholm, – 1926.
5. Мельников, А.В. О стохастическом анализе в современной математике финансов и страхования // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – Т. 2. – №4. – С. 514–526.
6. Мельников, А.В. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.

7. Реннер, А.Г. Оценка платежеспособности страховой компании // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2006. – №1. – С. 144–145.
8. Реннер А.Г., Ерофеев А.В. Анализ вероятности неразорения страховой компании в коллективных моделях риска // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2007. – №8. – С. 69–72.

Сведения об авторах:
Реннер Александр Георгиевич, заведующий кафедрой математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета, доцент, кандидат технических наук
Ленерт Александра Георгиевна, студент факультета экономики и управления Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 6106, тел. (3532) 372444, e-mail: mme@mail.osu.ru

UDC 330.4:368
Renner A.G., Lenert A.G.
Orenburg state university
E-mail: mme@mail.osu.ru
THE STRUCTURE OF INVESTING THE INSURANCE COMPANY CAPITAL INTO RISK-FREE ASSETS
The article investigates the probability of non-ruin of an insurance company investing its own capital into risk-free assets. Assuming generalized nature of frequency distribution it identifies the structure of investing the insurance company capital into risk-free assets.
Key words: probability of non-ruin, investing, risk-free assets, Dirac delta function.

Bibliography:
1. Cramer, H. Collective Risk Theory // Jubilee Volume of F. Scandia, 1955.
2. Cramer, H. On the Mathematical Theory of Risk // Skandia Jubilee Volume, Stockholm Centraltryckeriet, 1930 / Reprinted in: Harald Cramer Collective works, ed. by A. Martin-Lof. – Berlin: Springer-Verlag, Vol. 1. – 1994. – P. 601–678.
3. Lundberg, F. Approximate representation of the probability function. II. Reinsurance of collective risks (PhD thesis) // Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1903. – 53 p.
4. Lundberg, F. Insurance technical smoothing of risks // F. Englunds Boktryckeri – A.B., Stockholm, – 1926.
5. Melnikov, A.V. Stochastic analysis at contemporary financial and insurance mathematics // Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. – 1995. – V. 2. – №4. – P. 514–526.
6. Melnikov, A.V. Financial obligations mathematics. – M.: GU VShE, 2001. – 260 p.
7. Renner, A.G. Evaluating an insurance company solvency // Vestnik Orenburg State University. – 2006. – №1. – P. 144–145.
8. Renner A.G., Erofeev A.V. The insurance company probability of non-ruin analysis at collective risk model // Vestnik Orenburg State University. – 2007. – №8. – P. 69–72.