7universum.com
UNIVERSUM:
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ – ТРЁХМЕРНАЯ И МНОГОМЕРНАЯ

Прокофьева Илона Владимировна
канд. техн. наук, доцент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана,
105005, РФ, г. Москва, 2 Бауманская, 5
E-mail: ilonaprof@mail.ru

Демидов Сергей Геннадьевич
канд. техн. наук, доцент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана,
105005, РФ, г. Москва, 2 Бауманская, 5
E-mail: sgd@email.ru

DESCRIPTIVE GEOMETRY – THREE DIMENSIONAL AND MULTIDIMENSIONAL

Ilona Prokofieva
Candidate of Engineering sciences,
Associate professor of Bauman Moscow State University,
105005, Russia, Moscow, 2 Baumanskaya St., 5

Sergey Demidov
Candidate of Engineering sciences,
Associate professor of Bauman Moscow State University,
105005, Russia, Moscow, 2 Baumanskaya St., 5

АННОТАЦИЯ

Трёхмерная начертательная геометрия хорошо знакома любому инженеру, научно-техническому работнику как базовая дисциплина курса инженерной графики, изучаемого в любом техническом вузе. Многомерная начертательная геометрия, с помощью приёмов которой можно графически решить любую инженерную, научную или экономическую задачу, неизвестна большинству выпускников технических вузов. Эта дисциплина получила развитие во второй

Прокофьева И.В., Демидов С.Г. Начертательная геометрия — трёхмерная и многомерная // Universum: Технические науки : электрон. научн. журн. 2016. № 3-4 (25) .
URL: http://7universum.com/ru/tech/archive/item/3078

половине двадцатого века. Были зафиксированы работы, в которых многопараметрические задачи решены способами, изложенными в курсе многомерной начертательной геометрии. Однако по объективным причинам в девяностых годах научная работа была резко сокращена, многие научные работники ушли из профессии. Для развития экономики стран СНГ необходимо возрождать активную научную деятельность, пропагандировать дисциплины, имеющие перспективу практического использования в решении актуальных задач. В этой работе показана идентичность приёмов изображения геометрических объектов на чертеже в трёхмерной и многомерной начертательных геометриях. Она позволяет использовать методы проецирования, которые имеют наиболее широкое распространение в инженерной практике и изучаются в вузах, – методы ортогональных проекций. Классические методы начертательной геометрии трехмерного пространства – метод ортогональных проекций, а также метод прямоугольных координат – находят непосредственное применение и в начертательной геометрии многомерного пространства.

ABSTRACT

Three-dimensional descriptive geometry is familiar to any engineer and scientist because it is the basic graphic discipline taught in any technical university. Multidimensional descriptive geometry unknown to most technical universities graduates, although its techniques can graphically solve many complicated engineering, scientific or economic problems. This discipline made a great progress in the second half of the twentieth century. During this period several researches appeared in which multiparameter problems were solved by using multidimensional descriptive geometry methods. However, in the nineties for objective reasons the scientific work was drastically reduced; many scientists have left the profession. For CIS countries economy development, it is necessary to revive an active scientific development, to promote perspective disciplines, which can be used in solving actual, practical problems. The methods identity of three-dimensional and multidimensional descriptive geometry, especially graphic, is discussed in this article. It is shown, that

multidimensional descriptive geometry problems can be solved by means of orthogonal projections method, which is the most widespread in engineering practice and taught at the technical universities. Descriptive geometry classical methods of three-dimensional space – method of orthogonal projections and the rectangular coordinates method can be used in descriptive multidimensional geometry.

Ключевые слова: трёхмерные, многомерные, векторные проекции, ортогональное проецирование, многопараметрические задачи.

Keywords: three-dimensional, multidimensional, vector projections, orthogonal projection, multi-parameter tasks.

Введение

Трёхмерная начертательная геометрия, основанная на методе ортогонального проецирования, является базовой дисциплиной, необходимой для составления и чтения технических чертежей. Поэтому она включена в программу первых курсов технических вузов.

Изучение способов изображения объектов на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям способствует развитию пространственного и логического мышления. Однако решение практических инженерных, научных и экономических задач ограниченно числом переменных (x, y, z) и не позволяет применить этот метод для графического решения многопараметрических задач.

Впервые задача изображения объектов многомерного пространства ставится в начале XX столетия [8]. В дальнейшем, в связи с развитием науки и техники, становится актуальным вопрос об изображении на чертеже объектов, имеющих число измерений более трёх, например, в области физико-химического анализа при построении диаграмм многокомпонентных систем [5]. Дальнейшее развитие науки и техники способствует расширению области использования методов начертательной геометрии: в физико-химическом анализе [2], в техническом моделировании поверхностей с использованием

ЭВМ [4], при обработке металлов давлением, прокаткой и резанием [1], при исследовании тепловых процессов в транспортных машинах [6] и в целом ряде других областей. В 1979 году появляется монография П.В. Филиппова «Начертательная геометрия многомерного пространства и её приложения», в которой изложены вопросы построения изображений линейных и нелинейных образов многомерного пространства, а также даны решения позиционных и метрических задач на чертежах, выполненных в ортогональных проекциях и в параллельной аксонометрии. В этой работе показано, что если элементы многомерного пространства моделировать образами трёхмерного пространства и изображать эти образы на чертежах, пользуясь названными методами, то для изображения на чертежах объектов многомерного пространства можно применять метод ортогональных проекций и параллельную аксонометрию [6].

1. Цель работы

Уже в девяностых годах в силу объективных причин (распад СССР) научные исследования в области решения многопараметрических задач приёмами многомерной начертательной геометрии в России и странах СНГ были прерваны. Большинство научно-технических работников не знакомы с возможностью построения многомерных объектов на плоскости, то есть возможностью графического, наиболее наглядного, решения многопараметрических задач, а студенты технических вузов не информированы о существовании многомерной начертательной геометрии.

Для дальнейшего развития экономики стран СНГ с возможностью дальнейшего решения широкого круга практических задач в различных отраслях науки и техники необходимо активизировать научную деятельность, наполнить и популяризовать методы многомерной начертательной геометрии, разъяснить преемственность методов трёхмерной и многомерной начертательной геометрии. Так, в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедре графики есть преподаватели, которые уделяют некоторое время на лекциях и семинарах общему знакомству с многомерной начертательной геометрией [3]. Студенты

готовят доклады на конференциях СНТО по вопросам многомерной начертательной геометрии [7].

В данной работе для упрощения восприятия многомерных объектов показана аналогия приёмов изображения для трёхмерного, четырёхмерного и пятимерного пространства. При повышении мерности объекта добавляется его векторная проекция, параллельная одной из осей *x, y, z*.

2. Пример 1

В трехмерной начертательной геометрии для определения натуральной величины (длины) отрезка прямой можно воспользоваться способом вспомогательного прямоугольного треугольника (рис. 1), у которого один катет – фронтальная проекция прямой [*A″ B″*], второй катет – разность координат *Δy* точек *A* и *B* по оси *y*, определяющий удаленность точек от плоскости проекций.

Этот способ основан на пространственном воображении, где аналогичный прямоугольный треугольник из пространства перемещают и пристраивают к проекции прямой [*A″B″*] на плоском чертеже (рис. 1).

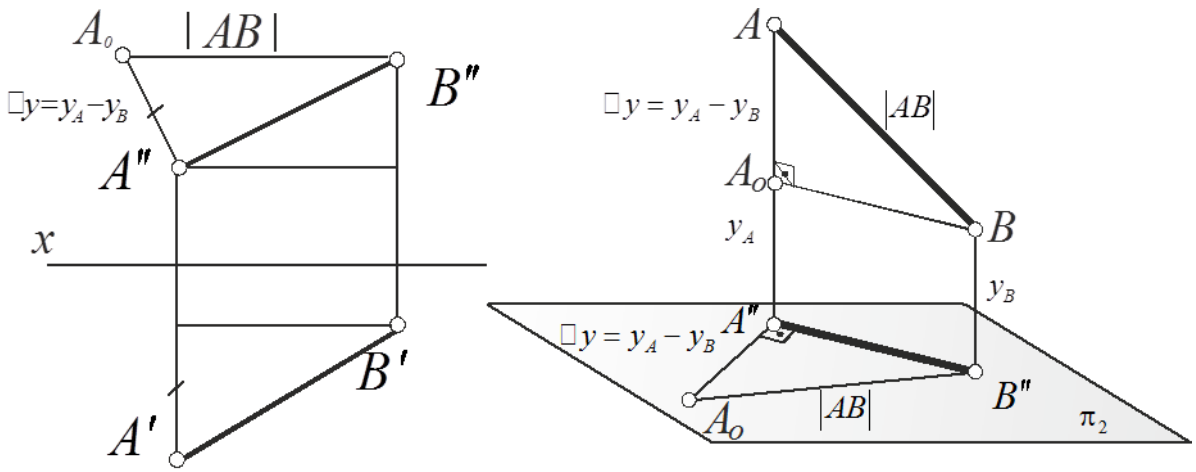


Рисунок 1. Определение длины отрезка по его проекциям

Как определить натуральную величину отрезка прямой *CD* в четырехмерном пространстве?

1. Длина *L* отрезка [*AB*] прямой в трехмерном пространстве аналитически выражается формулой:

$$L_{|AB|} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}\,, \qquad (1)$$

Где: x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B – координаты концов отрезка, $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$ – фронтальная проекция $A''B''$, A_0A'' – $\sqrt{(y_A - y_B)^2}$ (рис. 1).

2. Длина L_1 отрезка $[CD]$ прямой в четырехмерном пространстве аналитически выражается формулой

$$L_{|CD|} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2 + (t_C - t_D)^2} \quad (2)$$

где: x_C, y_C, z_C, t_C, x_D, y_D, z_D, t_D – координаты концов отрезка.

Определение отрезка прямой на ортогональном чертеже заключается в выполнении геометрических построений, необходимых для отыскания величины, которая выражается формулой (2). Эти построения аналогичны построениям, показанным для трехмерного пространства на рис. 1.

На ортогональном чертеже рис. 2 задан отрезок $[CD]$ прямой общего положения фронтальной, горизонтальной и горизонтальной векторной проекциями.

Если проекцию C_1D_1 отрезка принять за один катет прямоугольного треугольника, а в качестве второго катета отложить длину отрезка $D'_{12}1$, то гипотенуза такого треугольника представляет собой отрезок, длина которого выражается формулой

$$|C_1D_0| = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2}\ . \quad (3)$$

Если далее построенный отрезок C_1D_0 также принять за один из катетов прямоугольного треугольника, в котором в качестве второго катета (рис. 2)

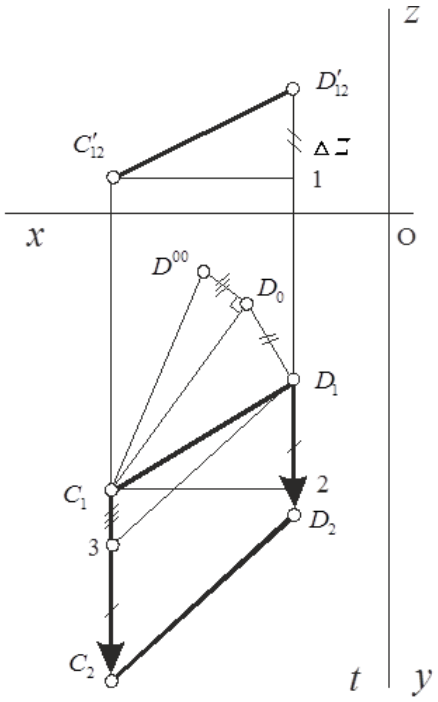


Рисунок 2. Графическое определение длины отрезка в четырехмерном пространстве

принят отрезок длиной, равной величине $t_C - t_D$, то гипотенуза такого треугольника и является искомой длиной L_1 заданного отрезка.

Таким образом, определение длины отрезка прямой общего положения в четырехмерном пространстве на ортогональном чертеже геометрически выразилось последовательным построением двух прямоугольных треугольников при горизонтальной проекции заданного отрезка.

3. Длина некоторого отрезка *EF* прямой в пятимерном пространстве аналитически выражается формулой:

$$L_{2|EF|} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 + (z_E - z_F)^2 + (t_E - t_F)^2 + (u_E - u_F)^2}\ , \quad (4)$$

где: x_E, y_E, z_E, t_E, u_E, x_F, y_F, z_F, t_F, u_F – координаты концов отрезка. Следовательно, определение длины отрезка прямой на ортогональном чертеже заключается в выполнении геометрических построений, необходимых для отыскания величины, выраженной формулой (4).

3. Пример 2

Рассмотрим изображение гиперплоскости на чертеже.

Линейное подпространство, размерность которого n – 1, обычно называется гиперплоскостью пространства $П^n$.

Уравнение плоскости в трехмерном пространстве имеет вид:

$$Ax+By+Cz+E=0. \quad (5)$$

Это уравнение может быть преобразовано в уравнение вида:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad (6)$$

которое называется уравнением плоскости относительно отрезков, отсекаемых ею на осях координат, так как числа a, b, c выражают эти отрезки. Эта плоскость пересекается с координатными плоскостями по прямым, которые будем называть следами плоскости (рис. 3).

Уравнение гиперплоскости в четырехмерном пространстве имеет вид:

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0 \quad (7)$$

Это уравнение может быть преобразовано в уравнение вида:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}=1, \quad (8)$$

которое называется уравнением гиперплоскости относительно отрезков, отсекаемых ею на осях координат, так как числа a, b, c, d выражают такие отрезки.

Эта гиперплоскость пересекается с координатными гиперплоскостями по плоскостям, которые будем называть следами гиперплоскости (рис. 4).

Уравнение гиперплоскости пятимерного пространства имеет вид:

$$Ax+By+Cz+Dt+Eu+F=0. \quad (9)$$

Это уравнение может быть преобразовано в уравнение вида:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}=1, \quad (10)$$

которое называется уравнением гиперплоскости относительно отрезков, отсекаемых ею на осях координат, так как числа a, b, c, d, e выражают эти отрезки.

Следы гиперплоскости на координатных плоскостях, пересекая координатные оси, отсекают на них отрезки (рис. 5), которые, очевидно, выражаются упомянутыми числами.

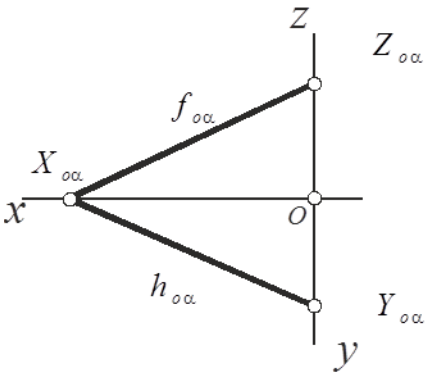


Рис. 3.Эпюр плоскости для трехмерного пространства

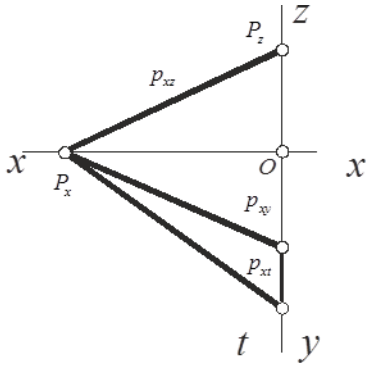


Рис. 4. Эпюр гиперплоскости для четырехмерного пространства

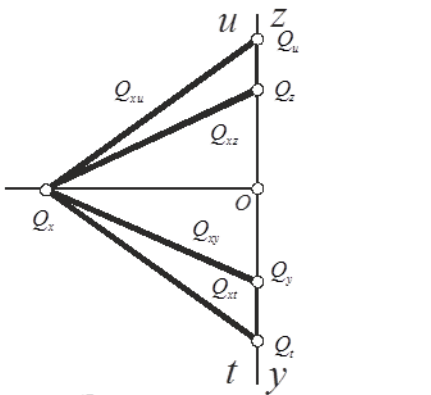


Рис. 5. Эпюр гиперплоскости для пятимерного пространства

Обобщая изложенное можно сделать следующие выводы [6]:

1. Метод моделирования многомерного пространства векторами трехмерного пространства, параллельными одной из осей прямоугольной системы координат, позволяет получить на ортогональном чертеже изображения многомерных объектов.

2. При решении позиционных и метрических задач многомерного пространства на ортогональном чертеже могут быть использованы приемы и способы построения, аналогичные применяемым в начертательной геометрии трехмерного пространства. Некоторые особенности решений задач обусловлены соответствующей размерностью пространства.

3. Использование прямоугольной координатной системы устанавливает непосредственную связь между аналитической формой задания этих образов и их графическим выражением на ортогональном чертеже.

Заключение

Основой решения многопараметрических задач является геометрическая интерпретация аналитического выражения и дальнейшее решение задачи приёмами начертательной геометрии. Повышение мерности пространства требует моделирования этих геометрических объектов на ЭВМ.

Метод моделирования многомерного пространства векторами трёхмерного пространства, параллельными одной из осей системы прямоугольных координат, позволяет получить изображения этих элементов на чертеже.

Такое моделирование элементов многомерного пространства позволяет использовать методы проецирования, которые имеют наиболее широкое распространение в инженерной практике и изучаются в вузах, – методы ортогональных проекций.

При решении задач многомерного пространства на ортогональном чертеже могут быть использованы приемы и способы, применяемые в начертательной геометрии трёхмерного пространства.

Список литературы:

1. Алексеев Ю.Н. Анализ процессов обработки металлов в многомерных пространствах // Самолетостроение и техника воздушного флота. – Харьков, 1968. – Вып. 13. – С. 124–126.
2. Аносов В.Я. К вопросу об изображении многокомпонентных систем // Изв. Сектора физ.-хим. анализ. – 1936. – Т. 9, № 5. – С. 5–25.
3. Гузненков В.Н. Геометро-графическое образование в техническом университете // Alma mater. – 2014. – № 10. – С. 71–75.
4. Котов И.И. Геометрические основы ключевых способов построения поверхностей // Труды Всесоюзн. энерг. ин-та. – 1957. – Вып. 10. – С. 15–36.
5. Федоров Е.С. Графические операции с четырьмя независимыми переменными // Изв. Российск. акад. наук. Сер. 4. – 1918. – № 7. – С. 615–624.
6. Филиппов П.В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – 280 с.
7. Якунин В.И., Гузненков В.Н. Геометрическое моделирование как обобщение методов прикладной геометрии и её разделов // Интеграл. – 2012. – № 5. – С. 120–121.
8. Schoute P.H. Mehrdimensionale Geometrie. T. I. – Leipzig, 1902. – 295 S.

References:

1. Alexeev Yu.N. Analysis of metals processing in multidimensional space. Samoletostroenie i tekhnika vozdushnogo flota [Aircraft construction and equipment of the air fleet]. Kharkov, 1968, Issue 13. pp. 124–126. (In Russian).
2. Anosov V.Y. To the question about the image of multicomponent systems. Izv. Sektora fiz.-khim. analiz [Proc. Sector of physical-chemical. Analysis]. 1936, vol. 9. no. 5, pp. 5–25. (In Russian).
3. Guznenkov V.N. Geometric-graphic education in technical University. Alma mater [Alma mater]. 2014, no. 10. pp. 71–75. (In Russian).
4. Kotov I.I. Geometrical basis of the key ways of constructing surfaces. Trudy Vsesoiuzn. energ. in-ta [Proc. Of All-Union. energy. Inst]. 1957, Issue 10. pp. 15–36. (In Russian).
5. Fedorov E.S. Graphical operations with four independent variables. Izv. Rossiisk. akad. nauk [Izv. Of Russian. Acad. Sciences]. Ser. 4, 1918, no. 7, pp. 615–624. (In Russian).
6. Filippov P.V. descriptive geometry of multidimensional spaces and its applications. Leningrad, Izd-vo Leningr. un-ta Publ., 1979. 280 p. (In Russian).
7. Yakunin V.I. Guznenkov V.N. Geometric modeling as a generalization of methods of applied geometry and its sections. Integral [Integral]. 2012, no. 5. pp. 120–121. (In Russian).
8. Schoute P.H. Mehrdimensionale Geometrie. T. I. Leipzig, 1902. 295 S.