

А. С. Кочина¹

¹ Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
A_kochina@mail.ru

Замечательные кривые как образы окружностей и прямых при конформных отображениях

Рассматриваются образы семейства окружностей и прямых при некоторых конформных отображениях. Показано, что эти образы являются замечательными кривыми, такими как кардиоида, лемниската Бернулли, логарифмическая спираль.

Ключевые слова: комплексная функция, конформные отображения, образы окружностей, замечательные кривые.

Рассмотрим семейство окружностей, имеющих общую точку в начале полярной системы координат и симметричных относительно полярной оси. В полярной системе координат это семейство окружностей задается следующим образом (рис. 1):

$$r = a \cos \varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], a > 0, a \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим комплексное отображение

$$\omega = f(z) = z^2.$$

Комплексный аргумент z можно представить в виде $z = re^{i\varphi}$, где (r, φ) — полярные координаты на плоскости (z) . Тогда

$$\omega = f(z) = z^2 = r^2 e^{i \cdot 2\varphi}.$$

Поступила в редакцию 22.05.2018 г.

© Кочина А. С., 2018

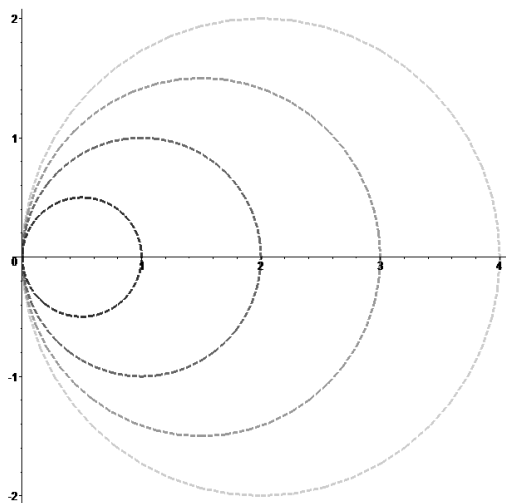


Рис. 1. Семейство окружностей $r = a \cos \varphi$

Пусть (ρ, Φ) — полярные координаты точек образа на плоскости (ω) , тогда

$$\rho = r^2, \quad \Phi = 2\varphi.$$

Имеем

$$\begin{cases} r = a \cos(\varphi) \\ \rho = r^2 \\ \Phi = 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = a^2 \cos^2(\varphi) \\ \Phi = 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho = a^2 \cos^2 \frac{\Phi}{2}.$$

Таким образом, при отображении

$$\omega = f(z) = z^2$$

точки (r, φ) переходят в точки (ρ, Φ) , связанные уравнением

$$\rho = \frac{a^2}{2}(1 + \cos \Phi), \quad \Phi \in [-\pi, \pi]$$

Полученное уравнение является уравнением семейства кардиоид на плоскости в системе координат (ρ, Φ) . При этом сохраняется заданная нами конфигурация исходного семейства окружностей: все кардиоиды семейства-образа также проходят через начало координат и симметричны относительно полярной оси (рис. 2).

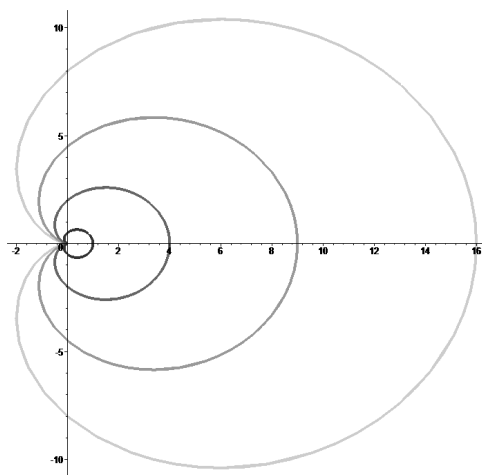


Рис. 2. Семейство образов при отображении $f(z) = z^2$

Рассмотрим одну ветвь отображения:

$$\omega = f(z) = \sqrt{z}.$$

В полярных координатах оно будет иметь следующий вид:

$$\omega = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Тогда полярные координаты точек образа на плоскости (ω) будут иметь вид

$$\rho = \sqrt{r}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{2}.$$

Имеем

$$\begin{cases} r = a \cos(\varphi) \\ \rho = \sqrt{r} \\ \Phi = \frac{\varphi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{a \cos(\varphi)} \\ \Phi = \frac{\varphi}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho = \sqrt{a \cos 2\Phi}.$$

Мы видим, что при отображении

$$\omega = f(z) = \sqrt{z}$$

точки (r, φ) переходят в точки (ρ, Φ) , связанные уравнением

$$\rho = \sqrt{a \cos 2\Phi}, \quad \Phi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Мы получили, таким образом, уравнение семейства правых петель лемнискат Бернулли. Все лемнискаты семейства, как и все окружности семейства-прообраза, проходят через начало координат; симметрия относительно полярной оси также сохранена (рис. 3).

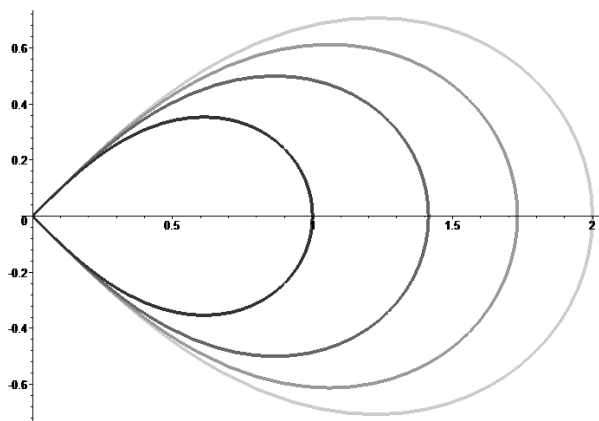


Рис. 3. Семейство образов при отображении $f(z) = \sqrt{z}$

Рассмотрим теперь образы прямых вида $y = kx$ при отображении

$$\omega = f(z) = e^z.$$

Имеем

$$z = x + iy = x + i \cdot kx, \quad \omega = e^z = e^x \cdot e^{i \cdot kx}.$$

Тогда в полярной системе координат уравнения образа прямых имеют вид

$$\begin{cases} \rho = e^x \\ \Phi = kx \end{cases} \Rightarrow \rho = e^{\frac{\Phi}{k}}.$$

Полученное уравнение определяет семейство логарифмических спиралей, разворачивающихся из точки $(1, 0)$ в полярных координатах (рис. 4).

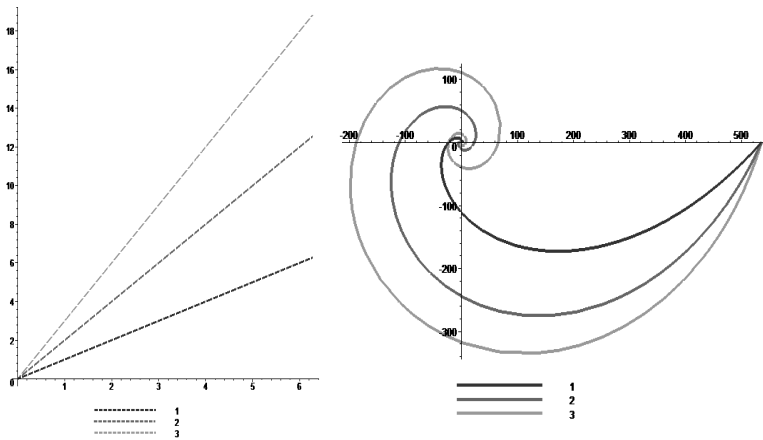


Рис. 4. Семейство образов прямых при отображении $f(z) = e^z$

По рисунку семейства образов можно судить о влиянии параметра k на вид спирали, то есть он увеличивает количество вращений, уменьшая радиусы спиралей.

Список литературы

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. М., 2003.
2. Клочко Т.В., Парфенова Н.Д. Решение задач комплексного анализа средствами MAPLE. Харьков, 2009.

A. Kochina¹

¹ Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
A_kochina@mail.ru

Remarkable curves as images of circles and lines under conformal maps

Submitted on May 22, 2018

We consider images of a family of circles under some conformal maps. It is shown that the images of these lines are remarkable curves, such as cardioid, lemniscate of Bernoulli, logarithmic spiral.

Keywords: complex function, conformal mapping, the images of circles, remarkable curves.

References

1. Krasnov, M.L., Kiselev, A.I., Makarenko, G.I.: Functions of a complex variable. Moscow (2003) (in Russian).
2. Klochkо, T.V., Parfenova, N.D.: The solution of problems of complex analysis by means of MAPLE. Kharkiv (2009) (in Russian).