

УДК 519.6:532.5:533.6.011.5

*Т. В. Шамардина*

Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова

## Осесимметричные течения с прямой звуковой линией

Изучены всевозможные осесимметричные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с прямой звуковой линией в осесимметричных соплах с круглыми и кольцевыми поперечными сечениями, а также разгон и торможение потоков при подходе к прямой звуковой линии или отходе от нее. Построены звуковые линии тока, в том числе начинающиеся в точке прямой звуковой линии на оси симметрии.

**Ключевые слова:** околосвуковое течение, прямая звуковая линия, звуковые линии тока, звуковое центральное тело.

*T. V. Shamardina*

Central Institute of Aviation Motors im. P.I. Baranova

## Axisymmetric flows with straight sonic line

Various axisymmetric flows in axisymmetric nozzles with circular and annular cross sections of an ideal (inviscid and non-heat-conducting) gas with a straight sonic line are studied, as well as acceleration and deceleration of flows when approaching or departing from a straight sonic line. Sonic streamlines are constructed, including the one starting at the point of a straight sonic line on the axis of symmetry.

**Key words:** transonic flow, straight sonic line, sonic streamline, sonic central body.

### 1. Введение

В связи с задачей профилирования сверхзвуковых частей плоских и осесимметричных сопел, а также оптимальных контуров сопел ракетных двигателей, реализующих максимум тяги, прямой звуковой линией занимались многие знаменитые ученые. Первыми серьезный вклад в исследование течений с обеих сторон от нее внесли К. Гудерлей [1] и Л. В. Овсянников [2], но течения с прямой звуковой линией не были рассмотрены полностью. Важное свойство таких течений – возможность раздельного рассмотрения и расчета течений в дозвуковой и сверхзвуковой частях. Это свойство и использовалось в задачах оптимального профилирования. Построение оптимальных контуров осуществляется методом характеристик, современная реализация которого изложена в [3]. Однако отход от прямой звуковой линии в рамках метода характеристик невозможен, поэтому Ю. Д. Шмыглевский с коллегами развил подходы, описанные, например, в [4], позволяющие строить начальную характеристику требуемого семейства. В связи с задачами оптимального профилирования, описанными в [5, 6] возник интерес к сверхзвуковым течениям, ограниченными звуковой линией тока, поэтому в [7] кроме течений, рассмотренных ранее, изучались и такие течения.

Далее осесимметричные течения с прямой звуковой линией изучаются в рамках единого подхода, который опирается на справедливые в рассматриваемой области универсальные уравнения околосвукового приближения и на численное интегрирование полученных обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем строится начальная характеристика, пересчитывается на конкретный газ и начинается расчет методом характеристик. Данное исследование носит уточняющий характер, но в нем есть и несколько новых моментов, касающихся сверхзвуковых осесимметричных течений, одна из границ которых – звуковая линия тока.

## 2. Исходные уравнения для осесимметричных течений и уравнения околосвукового приближения

Для реализации прямой звуковой линии набегающий поток должен быть однородным по энтропии и полной энтальпии, также в нем должна отсутствовать закрутка. Течение далее стационарно, а газ идеальный, вектор скорости  $\mathbf{V}$  и скорость звука  $a$  отнесены к критической. Ось  $x$  направлена по потоку нормально к прямой звуковой линии. Пусть  $(1+u)$  –  $x$ -компонента  $\mathbf{V}$ , а  $v$  – его компонента, нормальная к оси  $x$ , на прямой звуковой линии  $u = v = 0$ . Неизвестные  $u$  и  $v$  удовлетворяют двум уравнениям: следствию уравнения неразрывности в околосвуковом приближении и условию безвихренности:

$$\sigma^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Множитель  $\sigma^2$  равен  $\sigma^2 = \gamma + 1$ , и после преобразования  $r_0 = r\sigma^{2/3}$ ,  $u_0 = u\sigma^{2/3}$  получаются уравнения в околосвуковой форме, одинаковой для газов с разными термодинамическими свойствами:

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r_0} + \frac{v}{r_0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial r_0} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

$C^\pm$ -характеристики в плоскости  $xr_0$  определяются уравнениями

$$C^\pm : \frac{dx}{dr_0} = \pm \sqrt{u_0}.$$

Как ранее было показано в [1, 2, 4, 7], наиболее интересны решения вида  $u_0 = x^2 U(r_0)$ ,  $v = x^3 V(r_0)$ , использование же  $V$  как модуля скорости оговаривается далее отдельно при необходимости. Подстановка этих решений в (1) дает обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dV}{dr_0} + \frac{V}{r_0} = 2U^2, \quad \frac{dU}{dr_0} = 3V$$

и их следствия

$$\frac{dV^\circ}{dU^\circ} = \frac{2U^{\circ 2} r^\circ - V^\circ}{3V^\circ r^\circ}, \quad \frac{dr^\circ}{dU^\circ} = \frac{1}{3V^\circ}, \quad (2)$$

где новые переменные  $x^\circ, r^\circ, U^\circ, V^\circ$  – это нормированные на постоянную интегрирования старые. В зависимости от значения постоянной интегрирования изменяется диапазон значений  $U^\circ$ .

Решения симметричны:  $u(-x, r) = u(x, r)$ ,  $v(-x, r) = -v(x, r)$ , и это справедливо не только в околосвуковом приближении, но и для решений, описывающих осесимметричные течения полных уравнений Эйлера в силу их инвариантности относительно изменения знаков координаты  $x$  и компоненты  $v$  скорости газа. Поэтому все приведенные решения справедливы с обеих сторон от прямой звуковой линии. При отрицательных  $x$  тормозится сверхзвуковой поток в сужающемся канале слева от прямой звуковой линии. Наоборот, при положительных  $x$  тормозится дозвуковой поток и разгоняется сверхзвуковой. Так значения  $U^\circ \geq 0$  отвечают сверхзвуковому течению, а отрицательным  $-1 \leq U^\circ < 0$  отвечает дозвуковое течение, ограниченное сверху и снизу кривыми звуковыми линиями, которые подходят по нормали к прямой звуковой линии. При  $U^\circ \rightarrow \infty$  получаются центрированные волны разрежения или сжатия в концевых точках отрезков прямых звуковых линий.

Для расчета методом характеристик примыкающих к прямой звуковой линии сверхзвуковых течений необходима начальная  $C^\pm$ -характеристика, и для ее определения получим уравнение и проинтегрируем его:

$$\frac{dx^\circ}{dU^\circ} = \pm \frac{x^\circ}{2U^\circ},$$

а затем вернемся к изначальным переменным. В переменных  $x, r, u$  и  $v$  используем начальную характеристику для определения по конечным формулам прочих параметров потока и дальнейшего счета методом характеристик.

Значению  $U^\circ = \infty$  отвечает фокус центрированной волны, и для расчета параметров вблизи нее привлекаются асимптотические формулы. Точка фокуса для двух различных видов течения обозначается через  $r_{\infty k}^\circ$ .

Функции  $r_1^\circ(U^\circ)$  и  $r_2^\circ(U^\circ)$  с асимптотами  $r_{1,2}^\circ = r_{\infty 1,2}^\circ$ , найденные для положительных и отрицательных значений константы интегрирования, представлены на рис. 1 кривыми и горизонтальными отрезками, помеченными цифрами 1 и 2. Горизонтальные отрезки – значения, рассчитанные по асимптотическим формулам. Тот же смысл имеют сплошные и штриховые кривые  $V_k^\circ = V_k^\circ(U^\circ)$  на рис. 2.

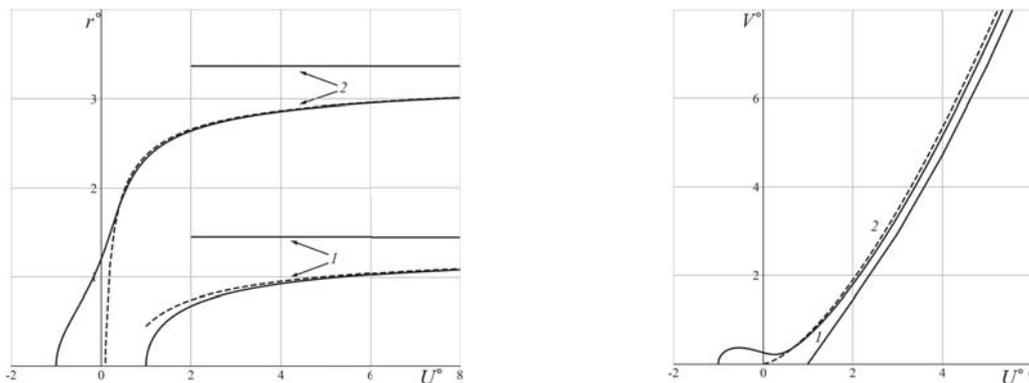


Рис. 1. Функции  $r_1^\circ(U^\circ)$  и  $r_2^\circ(U^\circ)$  с асимптотами Рис. 2. Функции  $V_1^\circ(U^\circ)$  и  $V_2^\circ(U^\circ)$  с асимптотами

В дополнение к простым осесимметричным течениям были рассмотрены течения в кольцевых каналах с центральным телом. Центральное тело может быть цилиндрическим, сужающимся и расширяющимся с горизонтальной касательной при  $x = 0$ . Внешний контур канала может быть цилиндрическим, расширяющимся и сужающимся. Как и ранее, возможны «отражения» (с изменением знаков  $x$  и  $v$ ) перечисленных вариантов. Используя различные граничные условия для центрального тела в зависимости от его типа, интегрируются уравнения осесимметричного течения. Значению  $U^\circ = \infty$ , как и ранее, отвечает центрированная волна. Найденные в результате  $U^\circ(r^\circ)$  и  $V^\circ(r^\circ)$  позволяют построить начальные  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристики для дальнейшего продолжения расчета сверхзвукового течения методом характеристик.

### 3. Течения с прямой звуковой линией и нормальными к ней звуковыми линиями тока

Переход к осесимметричным звуковым линиям тока, уходящим с прямой звуковой линией (приходящие получаются изменением знаков  $x$  и  $v$ ), начнем с  $r_0^\circ > 0$  — точки прямой звуковой линии, из которой выходит такая линия тока. Построение звуковой линии тока сверхзвукового течения нормальной прямой звуковой линией идет с помощью уравнений (2). Численное решение задачи начинается с задания  $r_0^\circ$  и ведется до  $U^\circ \gg 1$ . Далее при известной начальной  $C^-$ -характеристике следует расчет методом характеристик для совершенного газа при критической плотности  $\rho_*$  и  $\rho_* a_*^2$ , взятых за масштабы плотности и давления,  $p_* = 1/\gamma$ .

Результаты расчета течений со звуковыми центральными телами, построенными для разных  $r_0^\circ$ , приведены на рис. 3. Кривые 1–4 на рис. 3 — контуры звуковых ЦТ для  $r_0^\circ = 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1$  и  $0.5$  в координатах  $x = x^\circ/r_\infty^\circ, r = r^\circ/r_\infty^\circ$ . В масштабе рис. 3 кривые 1 и 2 совпадают.

Для центрального тела 4 вместе с его контуром приведена многократно разреженная сетка  $C^-$ -характеристик. Во всех рассчитанных примерах  $C^+$ -характеристики с удалением от прямой звуковой линии пересекаются.

Совпадение построенных для  $r_0^\circ = 10^{-3}$  и  $10^{-2}$  кривых 1 и 2 на рис. 3 позволяет рассчитывать на их близость к контуру звукового центрального тела, начинающегося на оси  $x$ .

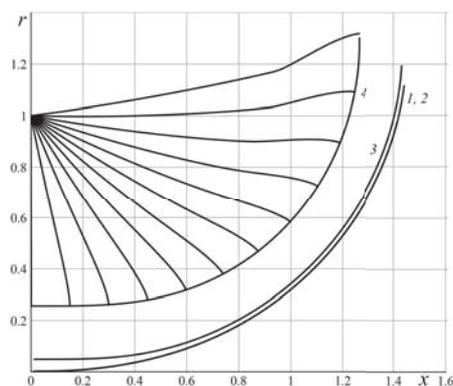


Рис. 3. Звуковые центральные тела различных радиусов

И действительно, удалось построить остроконечное (с  $r_0^0 = 0$ ) звуковое центральное тело. Контур звукового центрального тела и многократно разреженная сетка характеристик даны на рис. 4а. Программа для метода характеристик не строит всяческих скачков, возникающих из-за пересечения одноименных характеристик, однако сам факт пересечений устанавливается достоверно. Также интересно расщепление всячего скачка. Более полную информацию о течении в построенном осесимметричном канале дает численное интегрирование полных уравнений Эйлера на адаптированной к особенностям течения сетке со сквозным счетом разрывов. Результаты такого расчета представлены на рис. 4б.

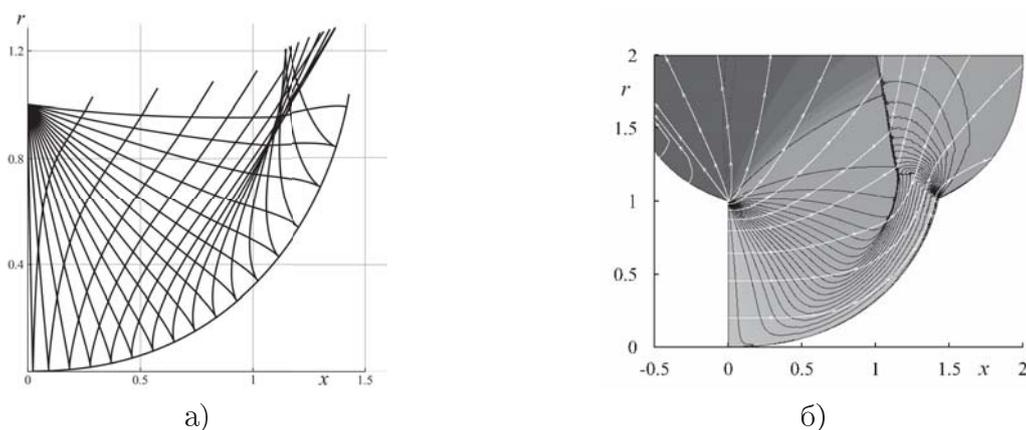


Рис. 4. Звуковое центральное тело, начинающееся на оси

#### 4. Заключение

Результаты выполненного исследования наиболее полные из всех, полученных ранее. Вдобавок построены примыкающие к прямой звуковой линии сверхзвуковые течения, одна из границ которых – звуковая линия тока. Из них особенно интересно реализующееся обтекание остроконечного звукового центрального тела, начинающегося на оси симметрии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00126).

#### Литература

1. Гудерлей К.Г. Теория околосвуковых течений. М.: ИЛ, 1960. 421 с.
2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003.

3. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010.
4. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
5. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Оптимальное профилирование контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 6. С. 172–184
6. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Профилирование сверхзвуковой части тарельчатого сопла при неравномерном трансзвуковом потоке // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 4. С. 145–157
7. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Метод характеристик и полухарактеристические переменные в задачах профилирования сверхзвуковых частей плоских и осесимметричных сопел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36. № 9. С. 159–176.

## References

1. *Guderley K.G* The Theory of Transonic Flow. M.: Foreign Languages Publisher House, 1960. 421 p.
2. *Ovsyannikov L.V.* Lectures on the basics of gas dynamics. Moscow-Izhevsk: Institute of computer technology, 2003. (in Russian).
3. *Kraiko A.N.* Theoretical gas dynamics: classics and modernity. M.: TORUS PRESS, 2010. (in Russian).
4. *Shmyglevskii U.D.* Analytical study of the dynamics of gas and liquid. M: Editorial URSS, 1999. (in Russian).
5. *Kraiko A.N., Tillyayeva N.I.* Optimal profiling of the supersonic part of a plug nozzle contour. Fluid Dynamics. 2000. V. 35, N 6. P. 945-956.
6. *Kraiko A.N., P'yankov K.S., Tillyayeva N.I.* Profiling of the supersonic part of a plug nozzle with a nonuniform transonic flow. Fluid Dynamics. 2002. V. 37, N 4. P. 637–648.
7. *Kraiko A.N., Tillyayeva N.I.* The method of characteristics and semi-characteristic variables in problems of profiling supersonic parts of axisymmetric and plane nozzles // Computational Maths and Mathematical Physics. 1996. V. 36, N 9. P. 159–176.

Поступила в редакцию 20.12.2018