

DOI: 10.18721/JPM.12103
УДК 532.517.4:536.24

МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ ДЛЯ SST-МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе представлена новая модель для турбулентного числа Прандтля, обеспечивающая улучшение предсказательных возможностей популярной полуэмпирической модели турбулентности SST (Shear Stress Transport – модель переноса сдвиговых напряжений) при ее использовании для расчетов пристенного теплообмена. Начальное тестирование разработанной модели проведено на задачах установившегося течения и теплообмена в круглой трубе и плоскопараллельном канале при варьировании числа Прандтля в широких пределах: от 0,004 до 95. По результатам тестов погрешность расчета теплоотдачи во всем диапазоне значений числа Прандтля снизилась в два раза и более. Наибольший положительный эффект от использования разработанной модели наблюдается при числах Прандтля, меньших 0,1.

Ключевые слова: турбулентное течение, пристенный теплообмен, численное моделирование, турбулентное число Прандтля

Ссылка при цитировании: Зайцев Д.К., Смирнов Е.М. Метод расчета турбулентного числа Прандтля для SST-модели турбулентности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 39–49. DOI: 10.18721/JPM.12103

METHOD OF CALCULATION OF TURBULENT PRANDTL NUMBER FOR THE SST TURBULENCE MODEL

D.K. Zaitsev, E.M. Smirnov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

We present a new model for turbulent Prandtl number that provides an improvement of prediction capabilities of the SST turbulence model in application to wall heat transfer problems. The model was calibrated using Kader's empirical correlation for near-wall temperature profile. To get an initial assessment of the model we performed computations of the fully developed flow in a round tube and a flat channel with Prandtl number varying from 0.004 to 95; the simulation results were validated against benchmark DNS data and empirical correlations for the Nusselt number. According to the tests, applying the new model resulted in considerable reduction of the Nusselt number prediction error (by factor two and more) in the whole range of Prandtl number considered; the most pronounced effect was observed at Prandtl number values below 0.1.

Keywords: turbulent flow, wall heat transfer, numerical simulation, turbulent Prandtl number

Citation: D.K. Zaitsev, E.M. Smirnov, Method of calculation of turbulent Prandtl number for the SST turbulence model, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 39–49. DOI: 10.18721/JPM.12103

Введение

Для численного моделирования турбулентного теплопереноса на основе осредненных уравнений Навье – Стокса (RANS – Reynolds Averaged Navier – Stokes) сегодня в большинстве практических приложений используется та или иная полуэмпирическая модель турбулентной вязкости [1, 2], а связь коэффициентов турбулентной теплопроводности λ_t и вязкости μ_t задается турбулентным числом Прандтля $Pr_t = \mu_t C_p / \lambda_t$. Модели, в которых для определения коэффициента турбулентной теплопроводности предлагается решать дополнительные дифференциальные уравнения (например, уравнения переноса «энергии» температурных пульсаций и скорости ее диссипации [3]), чаще всего воспринимаются как излишне сложные, и пока они не получили широкого распространения.

В моделях теплопереноса, использующих турбулентное число Прандтля, для последнего обычно принимается постоянное значение (как правило, $Pr_t = 0,85$ или $0,90$, в зависимости от используемой модели турбулентности), что в большинстве случаев не соответствует действительности. Согласно общепринятым представлениям о механизме турбулентного теплопереноса, которые подкреплены множеством расчетных и экспериментальных исследований (см., например, обзоры [4 – 6]), турбулентное число Прандтля меняется в зависимости от значимости молекулярного теплопереноса на масштабах турбулентных пульсаций. А именно, в условиях, когда молекулярным переносом тепла можно пренебречь (вдали от ограничивающих поток стенок при достаточно больших значениях числа Рейнольдса), турбулентное число Прандтля должно иметь некое предельное значение $Pr_{t,\infty} < 1$; по мере же увеличения относительной роли молекулярного теплопереноса (например, при приближении к стенке, а также при уменьшении числа Рейнольдса и/или молекулярного числа Прандтля $Pr = \mu C_p / \lambda$) значение Pr_t должно увеличиваться.

В литературе предложены многочисленные модели для турбулентного числа Прандтля, призванные обеспечить лучшее, чем при использовании «стандартного» значения $Pr_t \approx 0,85$, согласие расчетных и опытных данных по теплоотдаче для некоторых классов течений. В качестве примера можно упомянуть следующие формулиров-

ки из работ [7, 4, 8, 9, 5] соответственно:

$$Pr_t = \Gamma / (1 - e^{-\Gamma}), \quad (1)$$

$$\Gamma = (0,014 Re^{0,45} Pr^{0,2})^{-1};$$

$$Pr_t = \left(1 + \frac{100}{\sqrt{Re} Pr}\right) \times \left(\frac{1}{1 + 120/\sqrt{Re}} - 0,15\right); \quad (2)$$

$$Pr_t = 1,855 - \text{th}(0,2y^+ - 1,5); \quad (3)$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\rho \tau_w} d}{\mu};$$

$$\frac{1}{Pr_t} = \frac{0,5}{Pr_{t,\infty}} + \frac{\alpha Pe_t}{Pr_{t,\infty}^{0,5}} - (\alpha Pe_t)^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-1}{\alpha Pe_t Pr_{t,\infty}^{0,5}}\right)\right]; \quad (4)$$

$$Pr_t = 0,85 + \frac{f}{Pe_t};$$

$$Pe_t = Pr \cdot \frac{\mu_t}{\mu}. \quad (5)$$

Узкоспециализированные модели (1) и (2) разработаны для случая установившегося течения по цилиндрическим трубам. В этих моделях турбулентное число Прандтля полагается постоянным по сечению трубы, но его значение ставится в зависимость от глобального режимного параметра – числа Рейнольдса Re . Благодаря этому расчет дает правильное значение коэффициента теплоотдачи, хотя профиль температуры предсказывается не совсем верно.

Физически более оправданы модели (3) – (5), в которых значение Pr_t меняется по пространству, увеличиваясь при приближении к стенке. В частности, в формулировке (3) расстояние до стенки d явным образом входит в определение универсальной пристеночной координаты y^+ . Следует заметить, однако, что модель (3) весьма неудобна с точки зрения организации вычислений в современных гидродинамических (CFD – Computational Fluid Dynamics) кодах, поскольку используемый в выражении (3) аргумент y^+ не является чисто локальной переменной – для его вычисления требует-



ся знать напряжение трения τ_w на стенке, в точке, ближайшей к рассматриваемой точке потока.

В этом отношении более привлекательны модели, не требующие каких-либо нелокальных вычислений. В качестве примера можно упомянуть формулировки (4) и (5) с параметрами $Pr_{t,\infty} = 0,85$, $\alpha = 0,3$, $f = 2$, аргументом которых служит чисто локальный параметр Re_t , часто называемый турбулентным числом Пекле.

Отметим, что для обеих формулировок в литературе предложены также «нелокальные» модификации (малопригодные для внедрения в CFD-коды общего назначения). В частности, в работе [5] указывается на целесообразность «переключения» с корреляции (5) на фиксированное значение $Pr_t = 1,07$ при $y^+ < 10$, а в работе [10] для лучшего согласия с опытными данными по теплоотдаче в трубах при малых числах Прандтля (жидкие металлы) предложено вычислять предельное значение $Pr_{t,\infty}$ в выражении (4) с учетом числа Рейнольдса:

$$Pr_{t,\infty} = 0,85 + 100 Pr^{-1} Re^{-0,888}.$$

Следует также иметь в виду, что эффект от применения того или иного метода расчета турбулентного числа Прандтля может зависеть от используемой модели турбулентности, поскольку разные модели предсказывают различающиеся распределения турбулентной вязкости. В качестве примера можно упомянуть работу [11], в которой оценивалась точность моделей турбулентности $k - \varepsilon$ [12] (realizable) и $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport) [13] применительно к расчету теплообмена; оценка проводилась на задаче о течении жидкого металла ($Pr = 0,025$) в плоскопараллельном канале. По результатам расчетов в указанной работе [11], при использовании модели $k - \varepsilon$ наилучшее согласие с данными эталонных расчетов [14], выполненных по методу прямого численного моделирования (DNS – Direct Numerical Simulation), обеспечила корреляция (2), тогда как в случае модели SST лучшей оказалась формулировка (5) с параметром $f = 0,7$.

Таким образом, разработка модели для турбулентного числа Прандтля должна проводиться применительно к конкретной полуэмпирической модели турбулентности.

В настоящей работе предложен новый метод расчета турбулентного числа Прандтля, ориентированный в первую очередь на

моделирование пристенного теплообмена при малых и умеренных числах Прандтля с использованием популярной модели турбулентности $k - \omega$ SST [13].

В работе представлена концепция калибровки метода, дана его итоговая математическая формулировка, приведены результаты начального тестирования.

Расчеты проводились с помощью исследовательского CFD-кода SINF/Flag-S, ориентированного на численное решение задач гидродинамики и теплообмена с использованием структурированных и неструктурированных расчетных сеток, вписанных в границы области течения. Некоторые примеры применения кода и детали реализованных в нем численных схем даны в работах [15 – 19].

Математическая модель

В стандартной формулировке SST-модели турбулентности [13] значение турбулентного числа Прандтля полагается равным $Pr_t = 0,85$, что обычно обеспечивает приемлемую точность моделирования турбулентного теплопереноса для сред с числом Прандтля порядка единицы. Однако в случае жидких металлов, число Прандтля у которых на два порядка меньше, расчеты с указанным «стандартным» значением Pr_t значительно завышают теплоотдачу на стенке, поскольку, как уже было отмечено, турбулентное число Прандтля должно возрастать по мере увеличения относительной роли молекулярного теплопереноса; это особенно важно около стенки при малых числах Прандтля.

В настоящей работе, в качестве основы для доработки модели пристенного теплопереноса, из представленных в литературе соотношений для расчета турбулентного числа Прандтля была выбрана формулировка (5) [5], которая отличается простотой и удовлетворяет указанным выше общим требованиям. Подчеркнем также, что в рамках данной формулировки турбулентное число Прандтля вдали от стенки (где $\mu_t \gg \mu$ и, соответственно, $Re_t \gg 1$) стремится к «стандартному» значению $Pr_t = 0,85$, благодаря чему модель турбулентного теплопереноса подвергается ревизии только в пристенной области, без изменения свойств стандартной модели в остальной части потока.

Настройка предлагаемой модели для турбулентного числа Прандтля проводилась на задаче об установившемся плоском тече-

нии несжимаемой жидкости в зазоре между разнонагретыми стенками, одна из которых движется в продольном направлении (течение Куэтта). Число Рейнольдса Re , построенное по высоте канала и скорости движения стенки, полагалось равным 10^7 ; число Прандтля Pr варьировалось от 0,001 до 95.

Хотя данная задача, по сути, является одномерной, расчеты проводились в полной трехмерной постановке, с наложением условий периодичности (фактически, однородности) по продольному направлению. Поперек канала расчетная сетка бралась достаточно мелкой для получения сеточно-независимого решения (значение нормированной пристенной координаты в ближайшей к стенке расчетной точке составляло $y^+ < 0,03$). Для каждого выбранного числа Прандтля (общее количество вариантов составило 15) проводилась серия расчетов с различными значениями коэффициента f в выражении (5). По результатам расчетов определялось то «оптимальное» значение коэффициента f , которое обеспечивало наиболее близкое соответствие между расчетным профилем температуры $T^+(y^+)$ и следующей аппроксимацией:

$$\begin{aligned} T^+ &= e^{-G} Pr y^+ + e^{-1/G} T_{\log}^+; \\ G &= \frac{0,01 (Pr y^+)^4}{1 + 5 Pr^3 y^+}; \\ T_{\log}^+ &= 2,12 \ln(Pr(1 + y^+)) + \\ &+ \max(0; 3,85 Pr^{1/3} - 1,3)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned} T^+ &= \frac{(T - T_w) \rho C_p u_\tau}{q_w}; \\ u_\tau &= \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; y^+ = \frac{\rho du_\tau}{\mu}. \end{aligned}$$

Эта аппроксимация базируется на широко известной полуэмпирической корреляции Кадера [20], которая удачно аппроксимирует обширные опытные данные при числах Прандтля от 0,025 до 95 и, следовательно, может рассматриваться как их достаточно надежный аналитический «эквивалент». Ввиду использования довольно большого значения числа Рейнольдса, из оригинальной корреляции Кадера [20] были

убраны поправки, учитывающие влияние высоты канала. Также в аппроксимацию (6) введен ограничитель, устраняющий немонотонность по числу Прандтля в области его сверхмалых значений (второе слагаемое в выражении для $T_{\log}^+$).

Помимо подбора коэффициента f , вводились некоторые модификации в соотношения (5) с целью получения наилучшего согласования расчетного профиля температуры с аппроксимацией (6). В частности, опробовались различные ограничители, предотвращающие неограниченный рост Pr_t при $Re_t \rightarrow 0$. Итоговая формулировка разработанной модели для турбулентного числа Прандтля описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} Pr_t &= 0,85 \cdot \begin{cases} (1 + f^*/Pe_t^*), & f^* > 0; \\ (1 - f^*/Pe_t^*)^{-1}, & f^* < 0; \end{cases} \\ Pe_t^* &= \sqrt{0,01 + (Pr \mu_t / \mu)^2}; \\ f^*(Pr) &= (\psi_1 - 1) \cdot (\psi_2^2 + \psi_3^2)^{1/2}; \\ \psi_1 &= \left[(0,68 \ln(1 + 50/Pr) + \right. \\ &\quad \left. + 0,46)^{-4} + 2,2^{-4} \right]^{-1/4}; \\ \psi_2 &= 0,25 + \frac{0,75}{1 + 500 Pr^2}; \\ \psi_3 &= 0,11 + \frac{0,89}{1 + 5 Pr^{-2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь функция $f^*(Pr)$ задается выражениями, полученными в результате аппроксимации дискретных «оптимальных» значений коэффициента f^* . Качество данной аппроксимации иллюстрируется на рис. 1.

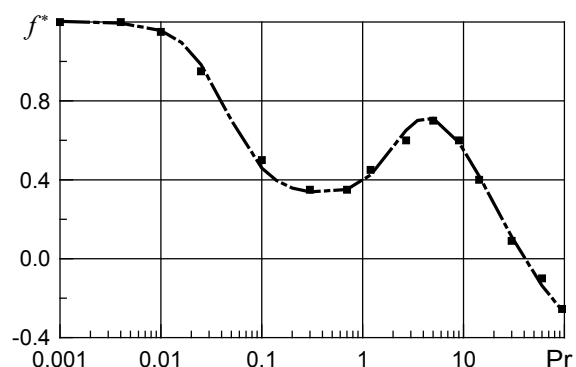


Рис. 1. Вид функции $f^*(Pr)$ в соотношениях (7); представлены дискретные «оптимальные» значения f^* (символы) и аппроксимирующая функция (линия)

На рис. 2 пристенные профили температуры для течения Куэтта, рассчитанные при $Pr = 0,7$ и $0,025$, сопоставляются с соответствующими опытными данными, приведенными в работе [20]. Видно, что использование разработанной модели (7) обеспечило значительно лучшее согласие расчетных и измеренных профилей температуры, по сравнению со случаем стандартного значения $Pr = 0,85$. Это позволяет рассчитывать и на более точное предсказание коэффициента теплоотдачи.

Тестовые расчеты

Представленная выше настройка модели теплопереноса (7) проводилась на модельной задаче Куэтта при довольно большом (нетипичном для практических приложений) числе Рейнольдса, что было продиктовано стремлением свести к минимуму влияние высоты канала на пристенную область течения и получить в профиле температуры хорошо различимый «логарифмический» участок. Для оценки предсказательных возможностей разработанной модели в условиях, более приближенных к реальным конфигурациям, были проведены RANS-расчеты течения жидкости в круглой трубе и в плоскопараллельном канале при умеренных числах Рейнольдса (порядка $10^4 - 10^5$). В обоих случаях рассматривалось установившееся течение (под действием заданного перепада давления) с объемным источником тепла. Как и для течения Куэтта, задача решалась в трехмерной постановке с наложением условий периодичности по

продольному направлению; расчетная сетка была достаточно мелкой ($y^+ < 0,03$) для получения сеточно-независимого решения.

Рассмотрим более подробно задачу о течении в круглой трубе. В рамках принятой постановки движение задается наложением продольного градиента давления dp/dx (эквивалентная объемная сила), а среднерасходная скорость U находится по результатам расчета. Градиент давления связан с напряжением трения на стенке τ_w и диаметром трубы D балансовым соотношением

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{4\tau_w}{D}.$$

При переходе к безразмерным величинам из этого соотношения следует связь между числом Рейнольдса Re , «динамическим» числом Рейнольдса Re_τ и коэффициентом гидравлического сопротивления ξ :

$$\frac{Re_\tau}{Re} = \frac{u_\tau}{U} = \sqrt{\frac{\xi}{8}},$$

где упомянутые безразмерные параметры определены следующим образом:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu};$$

$$Re_\tau = \frac{\rho u_\tau D}{\mu}; \quad (8)$$

$$\xi = \left| \frac{dp}{dx} \right| \cdot \frac{2D}{\rho U^2}.$$

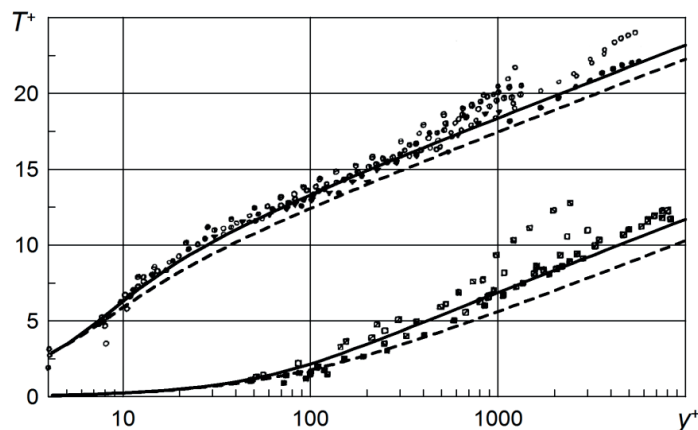


Рис. 2. Расчетные (линии) и измеренные (символы) профили температуры в пристенной области квазиравновесного турбулентного течения для значений числа Прандтля $Pr = 0,7$ и $0,025$ (верхние и нижние профили соответственно); приведены результаты расчетов по модели (7) (сплошные линии) и при $Pr_t = 0,85$ (пунктиры); символы — опытные данные разных авторов из работы [20]

Таким образом, задаваемым параметром задачи фактически является «динамическое» число Рейнольдса Re_τ , а значения Re и ξ определяются по результатам расчета профиля скорости.

Нагрев жидкости относительно фиксированной температуры стенки T_w создается равномерным объемным источником тепла Q , который фактически задает плотность q_w теплового потока на стенке: $q_w = QD/4$. Такая модельная постановка задачи с объемным источником тепла примерно соответствует условиям физических экспериментов с постоянным тепловым потоком на стенке. По полученным в результате расчета полям скорости и температуры потока определяется среднемассовая температура $\bar{T}$ и отвечающий ей безразмерный коэффициент теплоотдачи — число Нуссельта:

$$Nu = \frac{q_w D}{(\bar{T} - T_w) \lambda}. \quad (9)$$

Расчеты проводились по модели турбулентности $k - \omega$ SST [13] для двух значений «динамического» числа Рейнольдса: $Re_\tau = 10^3$ и $5 \cdot 10^3$; полученные значения числа Рейнольдса Re и коэффициента сопротивления ξ (8) составили, соответственно, $Re = 1,671 \cdot 10^4$ и $1,045 \cdot 10^5$, $\xi = 0,0286$ и $0,0183$. Отметим, что отклонение расчетных значений коэффициента сопротивления от значений, даваемых известной формулой Блазиуса [21]

$$\xi = \frac{0,3164}{Re^{0,25}},$$

не превышает 4 %.

Расчеты проводились при значениях числа Прандтля от 0,004 до 95. Наряду с разработанной моделью (7) был использован и стандартный подход с заданием фиксированного значения турбулентного числа Прандтля $Pr_\tau = 0,85$.

На рис. 3 представлены сводные результаты тестовых расчетов, а именно — сравнение расчетных данных по числу Нуссельта (точки) с известными эмпирическими корреляциями для гладких труб (линии):

$$Nu = \frac{(\xi/8) Pr Re}{1,07 + 12,7 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)}; \quad (10)$$

$$Nu = 6,3 + 0,0167 Re^{0,85} Pr^{0,93}. \quad (11)$$

Корреляция (10) [22, 23] для умеренных чисел Прандтля ($0,5 < Pr < 200$) связывает

число Нуссельта с коэффициентом сопротивления ξ (см. формулу (8)); погрешность этой корреляции в диапазоне чисел Рейнольдса $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$ не превышает 6 %.

Корреляция (11) [24] считается одной из лучших для жидких металлов в диапазоне чисел Рейнольдса $10^4 < Re < 10^6$.

Как можно видеть на рис. 3, для чисел Прандтля $Pr \geq 0,7$ отклонение расчетных значений числа Нуссельта от эмпирической корреляции (10) не превышает 10 %, а положительный эффект от использования разработанной модели (7) оказывается сравнительно малым — менее 5 %. Для малых чисел Прандтля ($Pr \leq 0,1$) расчет со «стандартным» значением $Pr_\tau = 0,85$ дает существенно завышенную интенсивность теплоотдачи (максимально — почти в полтора раза); использование модели (7) значительно улучшает ситуацию — отклонение от корреляции (11) не превышает 20 %. В целом, если учесть большой разброс опытных данных по теплоотдаче для жидких металлов, то такую точность расчета с использованием модели (7) можно считать вполне удовлетворительной.

Для второго теста по проверке работоспособности предлагаемой модели (течение в плоскопараллельном канале) имеется

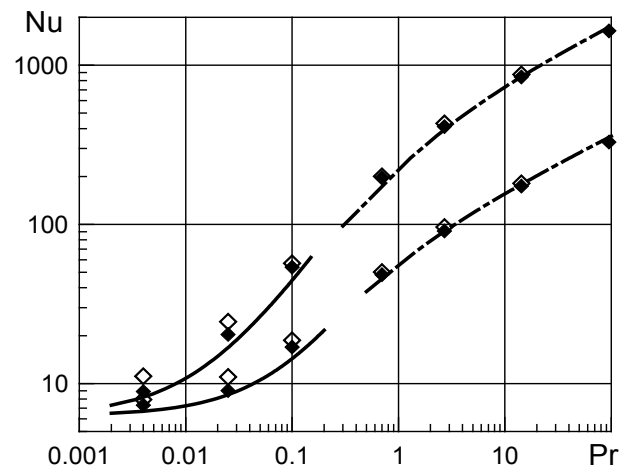


Рис. 3. Сравнение расчетных (символы) и экспериментальных (линии) данных по теплоотдаче в круглой трубе при значениях «динамического» числа Рейнольдса $Re_\tau = 10^3$ и $5 \cdot 10^3$ (нижние и верхние кривые соответственно);

приведены результаты расчетов по модели (7) и при $Pr_\tau = 0,85$ (затушеванные и пустые символы соответственно), а также эмпирические корреляции по формулам (10) и (11) (сплошные линии и штрихпунктиры соответственно)



открытая база данных DNS-расчетов [25], проведенных при числах Прандтля от 0,025 до 10. Постановка задачи полностью аналогична рассмотренной выше для случая круглой трубы.

Сначала, следуя условиям численных экспериментов [25], были выполнены расчеты течения в канале при значениях «динамического» числа Рейнольдса $Re_\tau = 360$ и 790 (за масштаб длины принята высота канала D). Однако полученные значения числа Рейнольдса Re (8) оказались на 4 % ниже соответствующих значений, приведенных в работе [25]; это равносильно завышению коэффициента гидравлического сопротивления примерно на 7 %. Поскольку при теплогидравлическом анализе число Нуссельта принято соотносить с числом Рейнольдса Re (а не Re_τ), дальнейшие расчеты проводились при скорректированных значениях $Re_\tau = 373$ и 814. В таком случае отклонение полученных значений числа Рейнольдса $Re = 5,70 \cdot 10^3$ и $1,41 \cdot 10^4$ от «эталонных» значений, представленных в работе [25], не превышало 0,5 %.

Главным источником погрешности определения коэффициента гидравлического сопротивления в настоящих расчетах выступает, очевидно, сама SST-модель турбулентности, одной из особенностей которой является не вполне адекватное предсказание значений турбулентной вязкости в пристенной области течения. В частности, как видно на рис. 4, в расчете по указан-

ной модели, при $Re = 1,41 \cdot 10^4$ полученное значение турбулентной вязкости на границе вязкого подслоя ($y^+ \approx 10$) оказывается завышенным в полтора раза, что приводит к заметному искажению профиля скорости потока $u^+ = u/u_\tau$. Естественно, это сказывается и на величине напряжения трения на стенке.

На рис. 4, *b* также приведено известное аналитическое решение

$$u_{\log}^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,5 \quad (12)$$

для распределения скорости в равновесной «логарифмической» области пристенного течения (см., например, [21]). По опыту расчетов с использованием SST-модели турбулентности, данной модели свойственно затягивание начала «логарифмического» участка в пристенном профиле скорости. На рис. 4, *b* можно видеть, что DNS-расчет показывает наличие в пристенном профиле скорости довольно протяженного «логарифмического» участка, тогда как в расчете по модели SST соответствующий участок практически вырождается.

На рис. 5 представлены нормированные профили температуры $T^+(y^+)$, полученные в настоящей работе и в эталонных DNS-расчетах [25] при значениях числа Прандтля $Pr = 0,71$ и 0,025. Видно, что, как и на рис. 2, использование модели (7) обеспечивает значительно лучшую согласованность расчетных профилей температуры с эталонными данными.

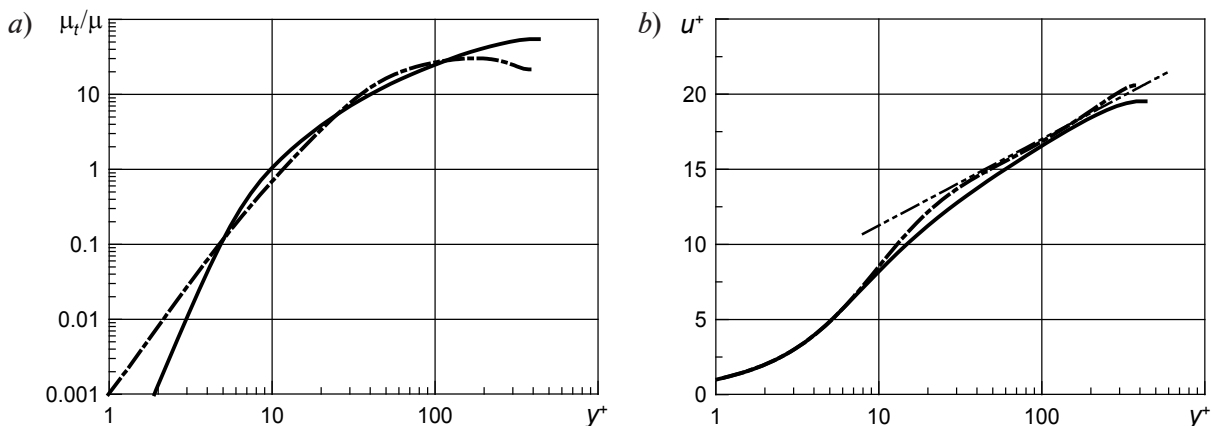


Рис. 4. Нормированные профили турбулентной вязкости (*a*) и скорости (*b*) в плоскопараллельном канале при $Re = 1,41 \cdot 10^4$;

представлены результаты расчета по модели SST (сплошные линии), DNS-расчета [25] (штрихпунктиры), а также аналитическое решение (12) (двойной штрихпунктир)

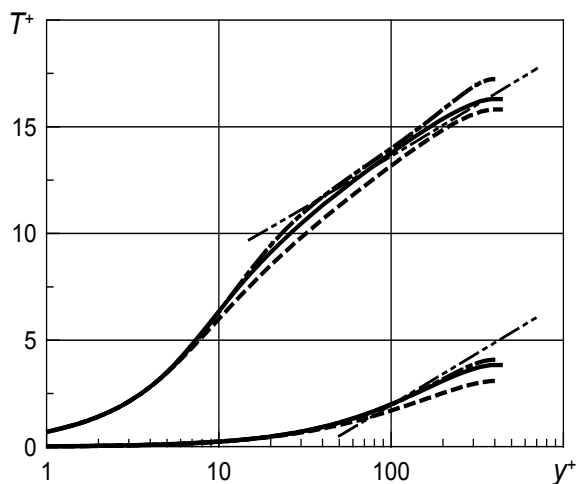


Рис. 5. Профили температуры $T^+(y^+)$ в плоском канале при $Re = 1,41 \cdot 10^4$ для значений $Pr = 0,71$ и $0,025$ (верхнее и нижнее семейства кривых соответственно);

представлены результаты расчета по модели (7) (сплошные линии), расчета при $Pr_t = 0,85$ (пунктиры), DNS-расчета [25] (штрихпунктиры), а также «логарифмические» профили $T_{\log}^+$ (6) (двойные штрихпунктиры)

На рис. 6 представлены сводные результаты тепловых расчетов, а именно – сравнение данных по числу Нуссельта (9), полученных в настоящей работе (линии) и в DNS-расчетах [25] (точки). Можно видеть, что, аналогично предыдущему тесту (см. рис. 3), использование разработанной модели (7) заметно улучшает точность расчета теплоотдачи при всех значениях числа Прандтля. В области $Pr \geq 0,2$ максимальное отклонение числа Нуссельта от эталонных значений [25] уменьшилось с 15 до 8 %, а при $Pr \leq 0,1$ – с 24 до 6 %

Отметим также, что итоговая погрешность расчета теплоотдачи – величина того же уровня, что и погрешность расчета трения (около 7 %). Это подталкивает нас к заключению о том, что обе погрешности обусловлены не вполне правильным поведением турбулентной вязкости, предсказываемым моделью турбулентности $k - \omega$ SST.

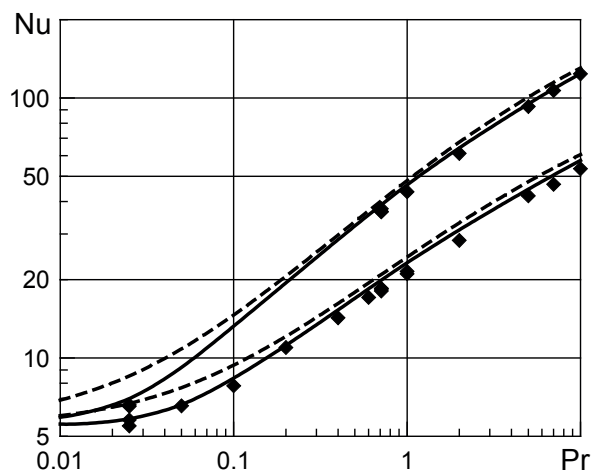


Рис. 6. Расчетные результаты по теплоотдаче в плоскопараллельном канале при значениях числа Рейнольдса $Re = 5,7 \cdot 10^3$ и $1,41 \cdot 10^4$ (нижнее и верхнее семейства кривых соответственно);

приведены результаты расчетов по модели (7) (сплошные линии), расчетов при значениях $Pr_t = 0,85$ (пунктиры), DNS-расчетов [25] (символы)

Заключение

В проведенном исследовании получены следующие основные результаты.

Разработана новая модель для расчета локального турбулентного числа Прандтля, обеспечивающая улучшенное качество предсказания характеристик теплопереноса в потоках жидкости с малыми и умеренными числами Прандтля в случае применения популярной модели турбулентности $k - \omega$ SST.

Проведено начальное тестирование разработанной модели на задачах установившегося течения и теплообмена в круглой трубе и плоскопараллельном канале при варьировании числа Прандтля от 0,004 до 95. Показано, что применение предлагаемой модели приводит к значительному уменьшению погрешности расчета теплоотдачи (до двух и более раз). Наибольший положительный эффект достигается при числах Прандтля, меньших одной десятой.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 18-19-00082.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wilcox D.C.** Turbulence modelling for CFD. La Canada: DCW Industries Inc., 1993. 460 p.
2. **Leschziner M.** Statistical turbulence modelling for fluid dynamics, demystified. London: Imperial College Press, 2016. 424 p.
3. **Nagano Y., Shimada M.** Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers // *Physics of Fluids*. 1996. Vol. 8. No. 12. Pp. 3379–3402.
4. **Reynolds A.J.** The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1975. Vol. 18. No. 9. Pp. 1055–1069.
5. **Kays W.M.** Turbulent Prandtl number – Where are we? // *ASME Journal of Heat Transfer*. 1994. Vol. 116. No. 2. Pp. 284–295.
6. **Chen F., Huai X., Cai J., Li X., Meng R.** Investigation on the applicability of turbulent Prandtl number models for liquid lead-bismuth eutectic // *Nuclear Engineering and Design*. 2013. Vol. 257. April. Pp. 128–133.
7. **Aoki S.** A consideration on the heat transfer in liquid metal // *Bulletin of the Tokyo Institute of Technology. Ser. B*. 1963. Vol. 54. Pp. 63–73.
8. **Hollingsworth D.K., Kays W.M., Moffat R.J.** Measurement and prediction of the turbulent thermal boundary layer in water on flat and concave surface // *Report HMT-41*. Dept. Mech. Engineering, Stanford University, 1989.
9. **Kays W.M., Crawford M.E.** Convective heat and mass transfer. New York: McGraw-Hill, 1980. 387 p.
10. **Weigand B., Ferguson J.R., Crawford M.E.** An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1997. Vol. 40. No. 17. Pp. 4191–4196.
11. **Vodret S., di Maio D.V., Caruso G.** Numerical simulation of turbulent forced convection in liquid metals // *Journal of Physics: Conference Series*. 2014. Vol. 547. P. 012033. Pp. 1–10.
12. **Shih T.H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J.** A new $k - \epsilon$ eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows – model development and validation // *Computers & Fluids*. 1995. Vol. 24. No. 3. Pp. 227–238.
13. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer*. 4. Begell House. 2003. Pp. 625–632.
14. **Kawamura H., Abe H., Matsuo Y.** DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1999. Vol. 20. No. 3. Pp. 196–207.
15. **Смирнов Е.М., Зайцев Д.К.** Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // *Научно-технические ведомости*. 2004. № 2 (36). С. 70–81.
16. **Абрамов А.Г., Ковалев Г.А., Смирнов Е.М.** Численное моделирование циркуляции паровоздушной среды и сопутствующей конденсации на ряде вертикальных трубок // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2013. № 3 (177). С. 69–79.
17. **Пожилов А.А., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М., Смирновский А.А.** Численное моделирование тепломассопереноса в трехмерной модели испарителя контурной тепловой трубы // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10. № 3. С. 52–63.
18. **Смирнов С.И., Смирнов Е.М., Смирновский А.А.** Влияние теплопереноса в торцевых стенках на турбулентную конвекцию ртути во вращающемся цилиндре // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10, № 1. С. 31–46.
19. **Smirnov E.M., Smirnovsky A.A., Schur N.A., Zaitsev D.K., Smirnov P.E.** Comparison of RANS and IDDES solutions for turbulent flow and heat transfer past a backward-facing step // *Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 54. No. 8. Pp. 2231–2241.
20. **Kader B.A.** Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1981. Vol. 24. No. 9. Pp. 1541–1544.
21. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
22. **Петухов Б.С., Кириллов В.В.** К вопросу о теплообмене при турбулентном течении жидкости в трубах // *Теплоэнергетика*. 1958. № 4. С. 63–68.
23. **Petukhov B.S.** Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. Vol. 6. Pp. 504–564.
24. **Sleicher C.A., Awad A.S., Notter R.H.** Temperature and eddy diffusivity profiles in

- NaK // International Journal of Heat Mass Transfer. 1973. Vol. 16. No. 8. Pp. 1565–1575. URL: <https://www.rs.tus.ac.jp/~t2lab/db/index.html>
 25. **Kawamura H.** DNS database of wall turbulence and heat transfer. URL: <https://www.rs.tus.ac.jp/~t2lab/db/index.html> (Accessed date: 11.01. 2019).

Статья поступила в редакцию 16.01.2019, принята к публикации 31.01.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЗАЙЦЕВ Дмитрий Кириллович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 zaitsev_dk@spbstu.ru

СМИРНОВ Евгений Михайлович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 smirnov_em@spbstu.ru

REFERENCES

- [1] **D.C. Wilcox**, Turbulence modelling for CFD, DCW Industries Inc., 1993.
- [2] **M. Leschziner**, Statistical turbulence modeling for fluid dynamics, demystified, Imperial College Press, London, 2016.
- [3] **Y. Nagano, M. Shimada**, Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers, Physics of Fluids. 8(12) (1996) 3379–3402.
- [4] **A.J. Reynolds**, The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers, International Journal of Heat and Mass Transfer. 18 (9) (1975) 1055–1069.
- [5] **W.M. Kays**, Turbulent Prandtl number — Where are we? ASME Journal of Heat Transfer. 116 (2) (1994) 284–295.
- [6] **F. Chen, X. Huai, J. Cai, et al.**, Investigation on the applicability of turbulent Prandtl number models for liquid lead-bismuth eutectic, Nuclear Engineering and Design. 257 (April) (2013) 128–133.
- [7] **S. Aoki**, A consideration on the heat transfer in liquid metal, Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, Ser. B. 54 (1963) 63–73.
- [8] **D.K. Hollingsworth, W.M. Kays, R.J. Moffat**, Measurement and prediction of the turbulent thermal boundary layer in water on flat and concave surface, Report HMT-41 (1989). Dept. Mech. Engineering, Stanford University.
- [9] **W.M. Kays, M.E. Crawford**, Convective heat and mass transfer, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [10] **B. Weigand, J.R. Ferguson, M.E. Crawford**, An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model, International Journal of Heat and Mass Transfer. 40 (17) (1997) 4191–4196.
- [11] **S. Vodret, D.V. di Maio, G. Caruso**, Numerical simulation of turbulent forced convection in liquid metals, Journal of Physics: Conference Series. 547 (2014) 012033, 1–10.
- [12] **T.H. Shih, W.W. Liou, A. Shabbir, et al.**, A new k–ε eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows — Model development and validation, Computers & Fluids. 24(3) (1995) 227–238.
- [13] **F.R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry**, Ten years of industrial experience with the SST turbulence model, Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, Begell House, (2003) 625–632.
- [14] **H. Kawamura, H. Abe, Y. Matsuo**, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect, International Journal of Heat and Fluid Flow. 20(3) (1999) 196–207.
- [15] **E.M. Smirnov, D.K. Zaitsev**, Finite volume method as applied to hydro- and gas dynamics and heat transfer problems in complex geometry domains, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. (2(36)) (2004) 70–81.
- [16] **A.G. Abramov, G.A. Kovalev, E.M. Smirnov**, Numerical simulation of circulation of steam-air mixture and film condensation on series of vertical tubes, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (3 (177)) (2013) 69–79.



- [17] **A.A. Pozhilov, D.K. Zaitsev, E.M. Smirnov, A.A. Smirnovsky**, Numerical simulation of heat and mass transfer in a 3D model of a loop heat pipe evaporator, *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 3(3) (2017) 210–217.
- [18] **S.I. Smirnov, E.M. Smirnov, A.A. Smirnovsky**, Endwall heat transfer effects on the turbulent mercury convection in a rotating cylinder, *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 3(2) (2017) 83–94.
- [19] **E.M. Smirnov, A.A. Smirnovsky, N.A. Schur, et al.**, A comparison of RANS and IDDES solutions for turbulent flow and heat transfer past a backward-facing step, *Heat and Mass Transfer*. 54(8) (2018) 2231–2241.
- [20] **B.A. Kader**, Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 24 (9) (1981) 1541–1544.
- [21] **H. Schlichting**, *Boundary layer theory*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [22] **B.S. Petukhov, V.V. Kirillov**, K voprosu o teploobmene pri turbulentnom techenii zhidkosti v trubah [On heat exchange in the turbulent fluid flow in tubes], *Thermal Engineering*. 4 (1958) 63–68.
- [23] **B.S. Petukhov**, Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties, *Advances in Heat Transfer*. 6 (1970) 504–564.
- [24] **C.A. Sleicher, A.S. Awad, R.H. Notter**, Temperature and eddy diffusivity profiles in NaK, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 16(8) (1973) 1565–1575.
- [25] **H. Kawamura**, DNS database of wall turbulence and heat transfer, <https://www.rs.tus.ac.jp/~t2lab/db/index.html>, accessed Jan. 11, 2019.

Received 16.01.2019, accepted 31.01.2019.

THE AUTHORS

ZAITSEV Dmitri K.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

zaitsev_dk@spbstu.ru

SMIRNOV Evgueni M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

smirnov_em@spbstu.ru