УДК 519.714

П.А. Карпович[1]

КРИТЕРИИ K-СИНГУЛЯРНОСТИ И РАЗДЕЛЕНИЕ 1-СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ*

Исследуется понятие k-сингулярности систем точек в пространстве $\mathbb{R}^m$ с l_1-метрикой. Система q точек является k-сингулярной тогда и только тогда, когда размерность линейного пространства полиномов степени не больше k от столбцов матрицы попарных расстояний (умножение поэлементное) строго меньше q. В работе получен алгебраический критерий k-сингулярности. Рассмотрена задача о разбиении системы точек на подсистемы, каждая из которых не является 1-сингулярной. Получена оценка на минимальное число таких подсистем.

Ключевые слова: алгоритмы вычисления оценок, комбинаторная оптимизация.

1. Введение. Рассматривается задача распознавания(классификации) в стандартной постановке [1]. Имеется множество допустимых объектов M, разбитое на классы: $M = K_1 \cup \ldots \cup K_l$. Каждому допустимому объекту возможно сопоставить набор признаков — признаковое описание. Для некоторого набора эталонных объектов $\widetilde{S} = \{\widetilde{s_1}, \ldots, \widetilde{s_t}\}$ известны признаковые описания и значения предикатов принадлежности к классам распознавания $\{\widetilde{s_i} \in K_j\}_{i=1,j=1}^{t,l}$. Требуется построить алгоритм распознавания, который по информации о наборе $\widetilde{S}$ правильно классифицирует контрольные объекты набора $S = \{s_1, \ldots, s_q\}$.

Алгебраический подход к решению задач классификации был предложен в работе [2]. В рамках подхода алгоритм распознавания представляется в виде суперпозиции оператора вычисления оценок близости B и решающего правила C. Оператор B по признаковым описаниям объектов из контрольной выборки S получает числовую $(q \times l)$-матрицу $\Gamma[B]$ оценок близости этих объектов к классам распознавания: q — число объектов контрольной выборки, l — число классов.

Одним из центральных понятий алгебраического подхода является свойство корректности семейств распознающих операторов и их алгебраических замыканий [2]. На практике свойство корректности семейства операторов оценок близости представляет собой достаточное условие получения произвольной матрицы классификации для контрольной выборки и отражает уровень мощности модели.

В работе [3] рассматривается задача распознавания образов с двумя непересекающимися классами. Признаковое пространство предполагается евклидовым действительным пространством размерности m, в котором для каждой координаты используется l_1-метрика: $\rho(x, y) = |x - y|$. Исследуется корректность семейства операторов АВО с пороговыми функциями близости [1]. Оказывается, корректность алгебраического замыкания степени k эквивалентна отсутствию k-сингулярности у системы точек признаковых описаний для контрольных объектов.

Определение 1 [4]. Система q точек в $\mathbb{R}^m$ с l_1-расстоянием называется k-сингулярной, если размерность минимального линейного пространства, содержащего все полиномы степени не больше k от столбцов матрицы попарных l_1-расстояний, строго меньше q (умножение столбцов поэлементное); 1-сингулярные системы — системы с вырожденными матрицами попарных l_1-расстояний.

Вопрос 1-сингулярности для систем точек изучался в ряде работ [5–7]. Мы приведем геометрический критерий 1-сингулярности систем точек в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1 [5]. *Система точек в $\mathbb{R}^2$ является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда она содержит подсистему вида $\{(a_i, b_i), (a_i, b_{i+1})\}_{i=1}^{r}$, $b_{r+1} = b_1$.*

В работе [5] такие подсистемы названы замкнутыми путями (closed paths).

Обобщение этого критерия дает достаточное условие 1-сингулярности в $\mathbb{R}^m$: если система точек содержит замкнутый путь, то она является 1-сингулярной [6]. Необходимые и достаточные условия 1-сингулярности для $\mathbb{R}^m$ были сформулированы в работе [7]. Обобщением результатов этой работы для

[1] Факультет ВМК МГУ, асп., e-mail: pkarpovich@mail.ru

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 10–07–00609–а.

случая k-сингулярных систем является геометрический критерий из работы [4]. Критерий использует понятие размеченного параллелепипеда.

Определение 2 [4]. *Размеченным параллелепипедом* размерности r называется такая функция $\Pi : \mathbb{R}^m \to \{-1, 0, 1\}$, что в точке $(c_1, \ldots, c_m)$ множества $X = \mathop{\times}\limits_{p=1}^{m} \{a_p, b_p\}$ она принимает значение $(-1)^c$, где c — количество совпадающих координат у точек $(c_1, \ldots, c_m)$ и $(a_1, \ldots, a_m)$, $r = |\{p \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid a_p \neq b_p\}|$. В остальных точках пространства $\mathbb{R}^m$ функция равна 0.

Теорема 2 [4]. *Система точек S является k-сингулярной тогда и только тогда, когда найдется такая конечная сумма Σ размеченных параллелепипедов с размерностью более k, что носитель суммы Σ содержится в системе S (носителем функции называется множество точек, в которых ее значение отлично от 0).*

Можно заметить, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ не существует размеченных параллелепипедов размерности более чем m. Следствием этого факта является то, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ невозможно построить k-сингулярную систему точек для $k \geqslant m$.

2. Алгебраический критерий k-сингулярности. В данной работе приводится алгебраический критерий для k-сингулярных систем точек.

Теорема 3. *Система точек $S = \{s_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $(c_1, \ldots, c_q)$, такой, что для всех $s \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{q} c_i \rho^k(s, s_i) = 0$, где ρ — l_1-метрика ($k \leqslant m$).*

В работе [4] критерий доказан для случая 1-сингулярных систем, данная теорема является обобщением этого результата.

Доказательство. Напомним некоторые определения и результаты из работы [4], которые нам понадобятся при доказательстве теоремы. Для системы точек S в $\mathbb{R}^m$ можно построить набор отношений эквивалентности $\{\theta_i\}_{i=1}^m$. Две точки s_k и s_t эквивалентны согласно отношению θ_i, если у них равны i-е координаты. Нас будет интересовать матрица $T = [T_1, \ldots, T_m]$, где каждый из блоков T_i составлен из характеристических q-мерных векторов всех классов эквивалентности для отношения θ_i. Блок T_i представляет собой бинарную матрицу размера $q \times r_i$, где r_i — количество различных значений, которые может принимать i-я координата.

Лемма 1 [4]. *Для системы точек S в $\mathbb{R}^m$ справедливо равенство пространств*:

$$U^k(P) = U^k(T) = U^k(\acute{P}),$$

где P — матрица попарных l_1-расстояний, $\acute{P}$ — матрица расстояний Хэмминга, T — матрица из характеристических векторов классов эквивалентностей, описанная выше.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Сначала мы докажем необходимость выполнения равенства из условия теоремы. Если система S является k-сингулярной и существует вектор $(c_1, \ldots, c_q)$, ортогональный пространствам $U^k(P)$ и $U^k(T)$, то для l_1-расстояния $\rho(x, y)$ и любой точки s в $\mathbb{R}^m$ будет выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{q} c_i \rho^k(s, s_i) = 0$. Действительно, если вектор $(c_1, \ldots, c_q)$ ортогонален пространству $U^k(T)$, то вектор $(c_1, \ldots, c_q, 0)$ будет ортогонален пространству $U^k(\tilde{T})$, где $\tilde{T}$ — бинарная матрица для классов эквивалентностей системы $\tilde{S} = S \cup \{s\}$. Блоки матрицы $\tilde{T}$ получаются из соответствующих блоков матрицы T приписыванием снизу одной строки, в которой одна единица, или добавлением нулевой строки и столбца $(0, \ldots, 0, 1)^T$. Из леммы также следует, что вектор $(c_1, \ldots, c_q, 0)$ будет ортогонален пространству $U^k(\tilde{P})$, где $\tilde{P}$ — матрица попарных l_1-расстояний для системы $\tilde{S}$. Это и является доказательством равенства. Для доказательства достаточности условия теоремы нам понадобится определение.

Определение 3. Для системы точек $S = \{s\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ обозначим $H^k(S)$ минимальное линейное пространство, содержащее векторы $(\rho^k(s, s_1), \ldots, \rho^k(s, s_q))$ для всех точек $s \in \mathbb{R}^m$, где ρ — l_1-метрика.

Вариант теоремы для 1-сингулярных систем, доказанный в работе [4], фактически устанавливает равенство линейных пространств $H^1(S)$ и $U^1(T)$. Нашей целью является построение более общего изоморфизма $H^k(S) \cong U^k(T)$. Выше приведено доказательство факта $H^k(S) \subseteq U^k(T)$. Мы покажем, что базис пространства $U^k(T)$ содержится в $H^k(S)$, что будет доказывать обратное вложение.

Доказательство будет конструктивным. Мы покажем, что все векторы вида $\tilde{v}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{v}_k$ содержатся в пространстве $H^k(S)$, где векторы множества $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^k$ являются столбцами матрицы T. Напомним, что матрица T состоит из блоков $T = [T_1, \ldots, T_m]$. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\tilde{v} \in T_i$, подразумевая факт того, что вектор $\tilde{v}$ является столбцом блока T_i.

Выпишем выражение для k-й степени вектора l_1-расстояний от точки $s = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ до точек системы S:

$$V(s,T) = (\rho^k(s,s_1), \ldots, \rho^k(s,s_q)) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{\tilde{v}\in T_i} |\delta_i - \alpha_{\tilde{v}}| \cdot \tilde{v}\right)^k,$$

где $\alpha_{\tilde{v}}$ для вектора $\tilde{v}$ из блока T_i является значением i-й координаты точек в классе эквивалентности, соответствующем вектору $\tilde{v}$.

Предположим теперь, что i-я координата точки $s = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ не равна ни одному из чисел множества $\{\alpha_{\tilde{v}}\}_{\tilde{v}\in T_i}$ для всех i. Рассмотрим точку z с координатами $(\delta_1 + \delta, \ldots, \delta_m)$ и выражение

$$\frac{V(z,T) - V(s,T)}{\delta}. \tag{1}$$

При стремлении δ к 0 данное выражение стремится к точке пространства $H^k(S)$, так как $H^k(S)$ — замкнутое линейное подпространство конечномерного пространства $\mathbb{R}^q$, и выражения вида $V(s,T)$ принадлежат $H^k(S)$. Функция $V(s,T)$ является кусочно-полиномиальной, поэтому значение выражения (1) при $\delta \to 0$ может быть вычислено как частная производная $V(s,T)$ по первой координате:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{V(z,T_S) - V(s,T_S)}{\delta} = k \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{\tilde{v}\in T_i} |\delta_i - \alpha_{\tilde{v}}| \cdot \tilde{v}\right)^{k-1} \cdot \left(\sum_{\tilde{v}\in T_1} \operatorname{sgn}(\delta_1 - \alpha_{\tilde{v}}) \cdot \tilde{v}\right), \tag{2}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

Учитывая факт, что мы выбрали точку s так, чтобы она всеми координатами отличалась от координат векторов множества S, мы можем продолжить проводить операцию дифференцирования и рассмотреть частные производные выражения (2). Операцию покоординатного дифференцирования будем проводить по различным координатам и, учитывая неравенство $k \leqslant m$, получим, что все векторы вида

$$k! \cdot \prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tilde{v}\in T_i} \operatorname{sgn}(\delta_i - \alpha_{\tilde{v}}) \cdot \tilde{v}\right)^{k_i}, \tag{3}$$

где $k_1 + \ldots + k_m = k$, $k_i \in \{0,1\}$, содержатся в $H^k(S)$.

Для каждого блока T_i обозначим через L_i минимальное линейное пространство, содержащее все векторы вида $\sum\limits_{\tilde{v}\in T_i} \operatorname{sgn}(\delta - \alpha_{\tilde{v}}) \cdot \tilde{v}$, для δ, отличных от значений $\{\alpha_{\tilde{v}}\}_{\tilde{v}\in T_i}$.

Рассматривая всевозможные линейные комбинации векторов вида (3) для различных точек s и различных разбиений числа k на слагаемые $\{k_i\}_{i=1}^m$, мы можем утверждать, что все векторы вида $\prod\limits_{i=1}^m (l_i)^{k_i}$, где $l_i \in L_i$ и $k_1 + \ldots + k_m = k$, $k_i \in \{0,1\}$, содержатся в $H^k(S)$. Мы покажем, что для всех i векторы $\tilde{v} \in T_i$ содержатся в пространстве L_i. Это будет доказывать, что векторы вида $\prod\limits_{i=1}^m (\tilde{v}_i)^{k_i}$, где $\tilde{v}_i \in T_i$ и $k_1 + \ldots + k_m = k$, $k_i \in \{0,1\}$, содержатся в $H^k(S)$.

Лемма 2. *Векторы $\tilde{v} \in T_i$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций векторов вида*

$$\sum_{\tilde{v}\in T_i} \operatorname{sgn}(\delta - \alpha_{\tilde{v}}) \cdot \tilde{v}, \tag{4}$$

где δ не равно никакому из значений $\{\alpha_{\tilde{v}}\}_{\tilde{v}\in T_i}$.

Доказательство. Упорядочим множество векторов из T_i по значению соответствующих им чисел $\alpha_{\tilde{v}}$, мы получим набор векторов $V = \{\tilde{v}_j \in T_i\}$, таких, что если для индексов выполнено $a < b$, то

$\alpha_{\tilde{v}_a} < \alpha_{\tilde{v}_b}$. Векторы вида (4) могут принимать ровно $|V| + 1$ значений для всевозможных допустимых значений δ:

$$\left\{ \sum_{p=1}^{a} \tilde{v}_p - \sum_{l=a+1}^{|V|} \tilde{v}_l \right\}_{a=0}^{|V|}. \tag{5}$$

Значения δ выбираются так, что они не совпадают с числами $\alpha_{\tilde{v}}$, $\tilde{v} \in T_i$. Легко видеть, векторы-столбцы T_i линейно выражаются через векторы вида (5). Лемма 2 и теорема 3 доказаны.

Замечание. Теорема верна и без условия $k \leqslant m$, однако доказательство становится более громоздким.

3. Разделение 1-сингулярных систем. В данном разделе будет рассмотрена задача о разбиении системы точек на минимальное число подсистем, каждая из которых не является 1-сингулярной. Мы приведем оценку на количество таких подсистем и покажем существование полиномиального алгоритма, который находит разбиение на минимальное количество подсистем. Для задачи распознавания с двумя непересекающимися классами в постановке из работы [3] такой алгоритм позволяет разбивать множество контрольных объектов на "области компетентности", для каждой из которых линейное замыкание семейства операторов АВО является корректным.

В предыдущем разделе мы описали, как сопоставить системе S из q точек бинарную матрицу T с q строками (каждой точке соответствует строка), такую, что система S является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда ранг матрицы T меньше q. Подсистема $\grave{S}$ системы S не является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда подматрица $\grave{T}$ матрицы T, составленная из строк, соответствующих точкам из $\grave{S}$, имеет ранг, равный $\left|\grave{S}\right|$. Таким образом, задача разбиения на минимальное число подсистем, каждая из которых не является 1-сингулярной, сводится к задаче разбиения множества строк матрицы T на подмножества, каждое из которых является набором линейно-независимых бинарных векторов.

Задача о разбиении произвольного множества векторов V на минимальное число линейно-независимых подсистем была успешно решена [8] с применением теории матроидов [9]. Нам необходимо найти минимальное число баз матричного матроида, соответствующего множеству векторов V, таких, что их объединение полностью покрывает носитель матроида. Описание полиномиальных алгоритмов, решающих данную задачу, можно найти в работах [8, 9]. Мы воспользуемся теоремой из книги [9] для получения оценки на минимальное количество подсистем в разбиении на системы без свойства 1-сингулярности.

Теорема 4 [9]. *Множество векторов V в $\mathbb{R}^m$ разбивается на k линейно-независимых подсистем тогда и только тогда, когда для любого подмножества U векторов из V выполнено: $|U| \leqslant k \cdot \mathrm{rg}(U)$, где $\mathrm{rg}(U)$ — ранг подсистемы U.*

Мы докажем следующее неравенство для системы точек S в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Теорема 5. *Для системы точек S пространства $\mathbb{R}^m$ и соответствующей ей матрицы $T(S)$ верно неравенство*

$$\frac{|S|}{\mathrm{rg}(T(S))} \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m},$$

где c_i — число значений, которые принимает i-я координата точек системы S.

Доказательство. Введем некоторые обозначения, которые нам понадобятся для доказательства. Для системы точек S будем обозначать через $T(S)$ бинарную матрицу классов эквивалентностей, построенную по системе S. Назовем решеткой множество $X \in \mathbb{R}^m$, являющееся декартовым произведением множеств D_i, $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_i \in D_i$, где множества D_i являются некоторыми конечными наборами действительных чисел. Для системы S мы будем обозначать через X_S минимальную решетку, содержащую все точки из S.

Мы будем последовательно добавлять к системе S точки из X_S, не уменьшая величины $|S| \,/\, \mathrm{rg}(T(S))$, пока не получим саму решетку X_S и покажем, что отношение $|X_S| \,/\, \mathrm{rg}(T(X_S))$ в точности равно числу в правой части неравенства из условия теоремы.

Сначала мы добавим к системе S все точки, которые не увеличивают ранг матрицы $T(S)$. Предположим, что мы получили систему $\acute{S}$. В случае, когда $\acute{S}$ совпадет с X_S, ранги матриц $T(S)$ и $T(X_S)$

будут совпадать и первая часть плана будет выполнена. Рассмотрим случай, когда $\acute{S}$ не совпадает с X_S. Мы покажем, что система $\acute{S}$ является объединением непересекающихся решеток $\acute{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \acute{X}_i$, которое обладает двумя свойствами. Во-первых, любые две точки s_1 и s_2, принадлежащие разным решеткам, различаются значениями по крайней мере двух координат. Во-вторых, для любой координаты p множество M ее значений для точек системы $\acute{S}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $M = \bigcup\limits_{j=1}^{h} M_j$, такие, что для любой решетки $\acute{X}_a$ множество значений p-й координаты точек решетки совпадает с одним из подмножеств M_j.

Предположим, что по этому принципу для некоторой координаты k множество N ее значений для точек системы $\acute{S}$ разбивается на v подмножеств $N = \bigcup\limits_{j=1}^{v} N_j$ и $v > 1$. Такая координата обязательно найдется, так как в противном случае $\acute{S}$ совпадало бы с X_S. Мы построим систему $\tilde{S}$, которая будет являться объединением непересекающихся решеток $\tilde{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \tilde{X}_i$, где каждая из решеток $\tilde{X}_a$ получена из соответствующей решетки $\acute{X}_a$ расширением множества значений k-й координаты до множества N, т. е. $\tilde{X}_a$ — это множество точек, содержащее все точки, для которых значение k-й координаты принадлежит множеству N и найдется точка из решетки $\acute{X}_a$, отличающаяся значением не более одной координаты. Решетки $\tilde{X}_a$ не будут пересекаться, это гарантируется первым свойством из описания множества $\acute{S}$. Мы покажем, что верны два неравенства:

$$\frac{\left|\acute{S}\right|}{\left|\tilde{S}\right|} \leqslant \frac{|N| - v + 1}{|N|} \leqslant \frac{\operatorname{rg}(T(X_{\acute{S}}))}{\operatorname{rg}(T(X_{\tilde{S}}))}. \tag{6}$$

Это будет доказывать, что при переходе от $\acute{S}$ к $\tilde{S}$ отношение мощности множества точек к рангу бинарной матрицы классов эквивалентностей не падает. Таким способом мы постепенно перейдем к X_S. Первая часть неравенства (6) следует из цепочки неравенств

$$\frac{\left|\acute{S}\right|}{\left|\tilde{S}\right|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d}\left|\acute{X}_i\right|}{\sum\limits_{i=1}^{d}\left|\tilde{X}_i\right|} \leqslant \max_{i=1}^{d} \frac{\left|\acute{X}_i\right|}{\left|\tilde{X}_i\right|} = \frac{\max\limits_{j=1}^{v}|N_j|}{|N|} \leqslant \frac{|N| - v + 1}{|N|}.$$

Системы $\acute{S}$ и $\tilde{S}$ представляют собой объединения наборов непересекающихся решеток $\acute{X}_i$ и $\tilde{X}_i$, поэтому верно первое равенство в цепочке. Следующее неравенство является простым алгебраическим фактом. Второе равенство вытекает из того, что отношение числа точек в решетках $\acute{X}_i$ и $\tilde{X}_i$ равно $|N_x| \,/\, |N|$, где $|N_x|$ — одно из подмножеств $\{N_j\}_{j=1}^{v}$. Последнее неравенство является следствием того факта, что множество N разбивается на v непересекающихся непустых подмножеств N_j.

Второе неравенство в цепочке (6) следует из двух неравенств для рангов матриц:

$$\operatorname{rg}(T(X_{\acute{S}})) \geqslant |N|\,, \quad \operatorname{rg}(T(X_{\tilde{S}})) \leqslant \operatorname{rg}(T(X_{\acute{S}})) + v - 1. \tag{7}$$

Эти два факта доказывают необходимое нам неравенство:

$$\frac{|N| - v + 1}{|N|} \leqslant \frac{|N|}{|N| + v - 1} \leqslant \frac{\operatorname{rg}(T(X_{\acute{S}}))}{\operatorname{rg}(T(X_{\tilde{S}}))}.$$

Из множества точек $\acute{S}$ можно выбрать подсистему Z из $|N|$ точек, которые будут различаться значением k-й координаты. Просто выбрать для каждого значения k-й координаты по одной точке с этим значением. Подсистема Z не является 1-сингулярной — k-й блок матрицы $T(Z)$ будет диагональным и $\operatorname{rg}(T(Z)) = |N|$, из этого следует первое неравенство (7).

Несложно также заметить, что к матрице $T(X_{\acute{S}})$ можно дописать $v-1$ строку так, что линейная оболочка строк новой матрицы будет совпадать с линейной оболочкой строк матрицы $T(X_{\tilde{S}})$. Действительно, необходимо взять некоторую точку $\acute{s}$ из $\acute{S}$ со значением k-й координаты из подмножества N_1 и добавить $v-1$ строк вида $\tau(\acute{s}) - \tau(s_{\acute{N}_j})$, $j > 1$, где $\tau(s)$ — бинарная строка, соответствующая точке s; $\acute{s_{N_j}}$ — точки, отличающиеся от $\acute{s}$ значением k-й координаты, для точки s_{N_j} берется значение из подмножества N_j (все такие строки принадлежат линейной оболочке строк матрицы $T(\tilde{S})$, так как все точки вида s_{N_j} содержатся в системе $\tilde{S}$). Заметим, что строки вида $\tau(s_a) - \tau(s_b)$, где точки s_a и s_b отличаются значением только k-й координаты, и значения k-й координаты взяты из одного подмножества N_j, уже содержатся в линейной оболочке строк матрицы $T(\acute{S})$. Таким образом, линейной комбинацией строк расширенной матрицы мы сможем получить любую строку вида $\tau(\tilde{s})$, где $\tilde{s}$ — точка из множества $\tilde{S}$, что доказывает второе неравенство (7).

Для завершения доказательства теоремы нам необходимо обосновать два факта: показать, что система $\acute{S}$ является объединением непересекающихся решеток с требуемыми свойствами; доказать, что величина $|X_S| \,/\, \mathrm{rg}(T(X_S))$ равна в точности числу в правой части неравенства. Мы сформулируем данные утверждения в виде двух лемм.

Лемма 3. *Для системы точек S в пространстве $\mathbb{R}^m$ верно равенство*:

$$\frac{|X_S|}{\mathrm{rg}(T(X_S))} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m},$$

где c_i — число значений, которые может принимать i-я координата точек системы S.

Доказательство. Равенство $|X_S| = \prod\limits_{i=1}^{m} c_i$ очевидно. Мы покажем, что $\mathrm{rg}(T(X_S)) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m$. Для этого рассмотрим какую-то точку $s \in X_S$ и набор O всех точек из X_S, которые отличаются от s значением ровно одной координаты. Таких точек ровно $c_1 + \ldots + c_m - m$. Несложно заметить, что данный набор O вместе с точкой s образует систему без 1-сингулярности. Действительно, в бинарной матрице $T(O \cup \{s\})$ будет $c_1 + \ldots + c_m - m$ столбцов, в каждом из которых будет стоять ровно по одной единице. Каждый такой столбец соответствует одной точке из O, и поэтому $\mathrm{rg}(T(O \cup s)) = c_1 + \ldots + c_m - m + 1$. Из этого следует неравенство $\mathrm{rg}(T(X_S)) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m$.

Можно также заметить, что линейными комбинациями строк вида $\tau(s) - \tau(o)$, $o \in O$, и строки $\tau(s)$ можно получить любую строку вида $\tau(x)$, $x \in X_S$, $\tau(a)$ — бинарная строка из матрицы $T(X_S)$, соответствующая точке a. Что доказывает неравенство в обратную сторону и утверждение леммы.

Лемма 4. *Система точек $\acute{S}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, такая, что добавление к ней любой точки $s \notin \acute{S}$ увеличивает ранг бинарной матрицы классов эквивалентностей, соответствующей системе, может быть представлена в виде объединения набора непересекающихся решеток $\acute{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \acute{X}_i$, которое обладает двумя свойствами*:

- *любые две точки s_1 и s_2, принадлежащие разным решеткам, различаются значениями по крайней мере двух координат*;
- *для любой координаты p и любых двух решеток $\acute{X}_a$ и $\acute{X}_b$ множества значений p-й координаты у точек решеток $\acute{X}_a$ и $\acute{X}_b$ либо не пересекаются, либо полностью совпадают.*

Доказательство. Сначала опишем представление в виде объединения непересекающихся решеток и докажем первое свойство из теоремы. Построим по системе $\acute{S}$ граф G. В качестве вершин у нас будут точки из $\acute{S}$, две точки-вершины будут соединены ребром тогда и только тогда, когда они отличаются значением ровно одной координаты. Граф G распадается на компоненты связности. Для компонент связности, очевидно, выполняется первое свойство теоремы. Мы покажем, что каждая из компонент связности представляет собой решетку. Для этого нам понадобится утверждение.

Утверждение. *Если для системы точек $\bar{S}$ в $\mathbb{R}^m$ граф $\bar{G}$ с вершинами-точками и ребрами, соединяющими пары вершин-точек, отличающихся значением ровно одной координаты, связен, то ранг матрицы $T(\bar{S})$ равен в точности $\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{c}_i + 1 - m$, где $\bar{c}_i$ — количество значений, которые может принимать i-я координата точек системы $\bar{S}$.*

Согласно утверждению и первой лемме, для каждой компоненты связности K графа G верно равенство $\mathrm{rg}(T(K)) = \mathrm{rg}(T(X_K))$. При условии, что в систему $\acute{S}$ нельзя добавить ни одной точки, не увеличивая ранга бинарной матрицы классов эквивалентностей, это и означает, что каждая из компонент связности является решеткой. Теперь докажем само утверждение.

Доказательство. Доказательство несложно провести по индукции по количеству точек в $\bar{S}$.

База. Для одной точки все верно.

Шаг индукции. Предположим, что у нас все доказано для k точек, докажем для $k+1$. Выберем точку a и подсистему из k точек $\bar{S}_a$, $\bar{S} = \bar{S}_a \cup \{a\}$, такую, что для подсистемы $\bar{S}_a$ соответствующий граф связен и условие утверждения выполнено. Относительно точки a возможны два случая.

Во-первых, точка a может содержаться в решетке $X_{\bar{S}_a}$. В этом случае, согласно лемме 3 и предположению индукции,

$$\mathrm{rg}(T(X_{\bar{S}_a})) = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i + 1 - m = \mathrm{rg}(T(\bar{S}_a)) = \mathrm{rg}(T(\bar{S}_a \cup a)).$$

Во-вторых, точка a может не лежать в решетке $X_{\bar{S}_a}$, но тогда среди точек системы $\bar{S}_a$ должна найтись точка b, которая отличается от a значением ровно одной координаты. В этом случае добавление точки a увеличивает ранг бинарной матрицы эквивалентности на 1, но ровно на 1 увеличивается при этом и величина $\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{c}_i + 1 - m$, что доказывает утверждение.

Для завершения доказательства леммы нам необходимо показать, что выполнено второе свойство из условия. Это можно сделать от противного. Допустим, что нашлись две разные решетки X_a и X_b из разложения $\acute{S}$ на непересекающиеся решетки. Пусть M_a — множество значений, которые может принимать p-я координата точек из решетки X_a, а M_b — аналогичное множество для решетки X_b, и найдутся два таких числа y и z, что $y \in M_a \cap M_b$, $z \in M_a$, $z \notin M_b$. Тогда существует точка $s_{by} \in X_b$ со значением p-й координаты, равным y, и две точки $s_{ay}, s_{az} \in X_a$, такие, что они отличаются значением только p-й координаты, и для первой оно равно y, а для второй — z. В этом случае точка s_{bz}, которая отличается от s_{by} значением p-й координаты (она равна z), должна принадлежать системе $\acute{S}$ так, что если бы ее не было, то добавление ее к системе не увеличивало бы ранга матрицы классов эквивалентностей — бинарная строка для нее может быть выражена через строки для точек s_{ay}, s_{az} и s_{by}. Но она не может содержаться в решетке X_a, так как $z \notin M_a$, и она не может содержаться ни в какой другой решетке их объединения, так как, согласно первому свойству из леммы, доказанному выше, точки из других решеток отличаются от точек решетки X_a значениями по крайней мере двух координат. Данное противоречие доказывает лемму.

Следствие. Произвольная система S точек в $\mathbb{R}^m$ может быть разбита на

$$\left\lceil \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m} \right\rceil \tag{8}$$

подмножеств с невырожденными матрицами попарных l_1-расстояний, где c_i — число значений, которые принимает i-я координата точек системы S.

Следствие. Для множества, являющегося решеткой, число (8) будет точным значением минимального числа подсистем с невырожденными матрицами попарных l_1-расстояний, на которые может быть разбита решетка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания образов или классификации // Пробл. кибернетики. № 33. М.: Наука, 1978. С. 5–68.
2. Журавлев Ю.И. Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. II // Кибернетика. 1977. № 6. С. 21–27.
3. Карпович П.А., Дьяконов А.Г. Критерии k-сингулярности систем точек в алгебраическом подходе к распознаванию // Материалы XIV Всероссийской конференции “Математические методы распознавания образов”. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 41–44.
4. Дьяконов А.Г. Критерии вырожденности матрицы попарных l_1-расстояний и их обобщения // Докл. РАН. 2009. **425**. № 1. С. 11–14.

5. Dyn N., Light W.A., Cheney E.W. Interpolation by piecewise-linear radial basis functions // J. Approx. Theory. 1989. N 59. P. 202–223.
6. Light W.A. The singularity of distance matrices // Multivariate Approximation Theory. Berlin: Birkhauser-Verlag, 1989. P. 233–240.
7. Reid L., Sun X. Distance matrices and ridge function interpolation // Canadian J. of Mathematics. 1993. N 45. P. 1313–1323.
8. Edmonds J. Matroid partition // Math. Decision Sciences. Proc. 5th Summer Seminary Stanford. Part 1 (Lectures of Applied Mathematics 11). Stanford. 1968. P. 335–345.
9. Schrijver A. Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency. Berlin: Springer, 2003. **1**. P. 651–761.

Поступила в редакцию
24.02.10

k-SINGULARITY CRITERION AND PARTITIONING OF 1-SINGULAR SYSTEMS

Karpovich P. A.

The system of q points is called k-singular if and only if the dimension of the linear-space of polynomials of degree at most k columns of the matrix pairwise distances (elementwise multiplication) is strictly less than q. We obtain an algebraic criterion for k-singularity. For problem of partitioning a system of points on non 1-singular subsystems, we get an estimate for the minimum number of such subsystems.

Keywords: estimation algorithms, combinatorial optimization.