

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЯТОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин

Аннотация. Рассматривается краевая задача для дифференциального оператора пятого порядка с разделенными граничными условиями. Потенциал оператора является суммируемой функцией на отрезке. При больших значениях спектрального параметра получена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения. Изучены уравнение на собственные значения исследуемого оператора и индикаторная диаграмма этого уравнения. Предложен новый метод для нахождения асимптотики собственных значений изучаемого оператора.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальный оператор, разделенные граничные условия, суммируемый потенциал, асимптотика собственных значений, собственная функция.

1. Введение

Изучение асимптотики спектра дифференциальных операторов начиналось со случая гладких коэффициентов. Для того чтобы изучать спектральные свойства дифференциальных операторов, необходимо уметь выписывать асимптотические формулы для решений соответствующих дифференциальных уравнений (при больших значениях спектрального параметра) в зависимости от гладкости коэффициентов. В [1] для дифференциальных уравнений высокого порядка были выписаны асимптотические формулы для решений в случае бесконечной гладкости коэффициентов и вычислены регуляризованные следы для соответствующих дифференциальных операторов. В [2] для операторов второго порядка была установлена зависимость между гладкостью потенциала и количеством членов разложения в асимптотических формулах для решений дифференциального уравнения. В [3] для дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами был предложен метод нахождения асимптотических формул для собственных значений этих операторов. Случай кусочно гладких коэффициентов для дифференциальных операторов второго порядка изучен в [4–8]. Случай суммируемого потенциала для оператора второго порядка был впервые рассмотрен в [9]. В работах [10–13] автором предложен метод исследования операторов порядка выше второго с суммируемыми коэффициентами. При больших значениях спектрального параметра была найдена асимптотика решений

соответствующих дифференциальных уравнений. С помощью этой асимптотики и соответствующих асимптотических оценок можно вычислять асимптотику собственных значений и асимптотику собственных функций операторов с суммируемыми коэффициентами.

2. Постановка задачи

Изучим следующую краевую задачу для дифференциального оператора пятого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(5)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^5 y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a > 0, \quad (1)$$

с разделенными граничными условиями

$$\begin{aligned} y^{(m_1)}(0) = y^{(m_2)}(0) = y^{(m_3)}(0) = y^{(m_4)}(0) = y^{(n_1)}(\pi) = 0, \\ m_1 < m_2 < m_3 < m_4, \quad m_k, n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагаем, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0; \pi]$:

$$q(x) \in L_1[0; \pi] \iff \left(\int_0^x q(t) dt \right)' = q(x) \quad (3)$$

почти для всех $x \in [0; \pi]$.

Наша цель — найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(3).

3. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1)

Для начала получим асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ .

Пусть $\lambda = s^5$, $s = \sqrt[5]{\lambda}$, $\sqrt[5]{1} = +1$.

Пусть w_k , $k = 1, 2, \dots, 5$, — различные корни пятой степени из единицы:

$$\begin{aligned} w_k^5 = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{5}(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \\ w_1 = 1, \quad w_2 = e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad w_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = z \neq 0, \\ w_3 = e^{\frac{4\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = w_2^2 = z^2, \quad w_4 = w_2^3, \dots, \\ w_k = w_2^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом для чисел w_k , $k = 1, 2, \dots, 5$, из (4) справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^5 w_k^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad \sum_{k=1}^5 w_k^m = 5, \quad m = 0, \quad m = 5. \quad (5)$$

С помощью метода вариации постоянных аналогично работам [14, гл. 2; 15, гл. 4; 16; 17, гл. 1] устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^5 C_k y_k(x, s), \quad y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^5 C_k y_k^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad (6)$$

$$y_k(x, s) = e^{aw_k s x} - \frac{1}{5a^4 s^4} A_{4,k}^0(x, s) + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|x}}{s^8}\right), \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad (7)$$

$$\frac{y_k^{(m)}(x, s)}{(as)^m} = w_k^m e^{aw_k s x} - \frac{A_{4,k}^m(x, s)}{5a^4 s^4} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|x}}{s^8}\right), \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad (8)$$

$$A_{4,k}^0(x, s) = \sum_{n=1}^5 w_n e^{aw_n s x} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn}, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad (9)$$

$$A_{4,k}^m(x, s) = \sum_{n=1}^5 w_n w_n^m e^{aw_n s x} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn}, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad m = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

При выводе формул (6)–(10) использованы следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} A_{4,k}^0(0, s) &= 0, \quad A_{4,k}^m(0, s) = 0, \quad y_k(0, s) = 1, \\ y_k^{(m)}(0, s) &= w_k^m (as)^m, \quad y(0, s) = \sum_{k=1}^5 C_k \cdot 1, \\ y_k^{(m)}(0, s) &= \sum_{k=1}^5 C_k w_k^m (as)^m, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (11)$$

4. Изучение граничных условий (2)

Применяя формулы (6)–(8) и начальные условия (11), изучим граничные условия (2). Подставляя формулы (6) в граничные условия (2), имеем

$$\begin{aligned} y^{(m_p)}(0, s) &\stackrel{(2)}{=} 0 \stackrel{(6)}{\iff} \sum_{k=1}^5 C_k y_k^{(m_p)}(0, s) = 0, \quad p = 1, 2, 3, 4, \\ y^{(n_1)}(\pi, s) &\stackrel{(2)}{=} 0 \stackrel{(6)}{\iff} \sum_{k=1}^5 C_k y_k^{(n_1)}(\pi, s) = 0, \quad m_p, n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема 2. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(2) с условием (3) суммируемости потенциала имеет следующий вид:

$$f(s) = \begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0, s) & y_2^{(m_1)}(0, s) & \dots & y_4^{(m_1)}(0, s) & y_5^{(m_1)}(0, s) \\ y_1^{(m_2)}(0, s) & y_2^{(m_2)}(0, s) & \dots & y_4^{(m_2)}(0, s) & y_5^{(m_2)}(0, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m_4)}(0, s) & y_2^{(m_4)}(0, s) & \dots & y_4^{(m_4)}(0, s) & y_5^{(m_4)}(0, s) \\ y_1^{(n_1)}(\pi, s) & y_2^{(n_1)}(\pi, s) & \dots & y_4^{(n_1)}(\pi, s) & y_5^{(n_1)}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Для доказательства теоремы 2 применим к системе (2) метод Крамера: однородная система (12) имеет ненулевые решения ($C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_5^2 \neq 0$) только в том случае, когда ее определитель равен нулю.

Учитывая формулы (11), уравнение (13) перепишем в следующем виде:

$$f(s) = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & \dots & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \\ y_1^{(n_1)}(\pi, s) & y_2^{(n_1)}(\pi, s) & \dots & y_4^{(n_1)}(\pi, s) & y_5^{(n_1)}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Раскладывая определитель $f(s)$ из (14) по последней строке, имеем

$$f(s) = y_1^{(n_1)}(\pi, s)D_{5,1} - y_2^{(n_1)}(\pi, s)D_{5,2} + y_3^{(n_1)}(\pi, s)D_{5,3} - y_4^{(n_1)}(\pi, s)D_{5,4} + y_5^{(n_1)}(\pi, s)D_{5,5} = 0, \quad n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad (15)$$

где $D_{5,k}$ — алгебраические миноры к элементу последней строки k -го столбца, $k = 1, 2, \dots, 5$. При этом

$$D_{5,5} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} \\ w_1^{m_3} & w_2^{m_3} & w_3^{m_3} & w_4^{m_3} \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} \end{vmatrix} = D_4 \neq 0, \quad (16)$$

так как $D_{5,5}$ представляет собой определитель Вандермонда чисел $w_2^{m_1}, w_2^{m_2}, \dots, w_2^{m_4}$:

$$D_{5,5} = \det \text{Wandermond's}(w_2^{m_1}, w_2^{m_2}, w_2^{m_3}, w_2^{m_4}) = \prod_{\substack{k > p, \\ k, p \in \{1, 2, 3, 4\}}} (w_2^{m_k} - w_2^{m_p}) \neq 0. \quad (17)$$

Введя обозначения $w_{m+5} = w_m$, $m = 1, 2, \dots, 5$, по формулам (4), (5) находим

$$D_{5,1} = \begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} & z^{4m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} & z^{4m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} & z^{4m_4} \end{vmatrix},$$

тем самым в силу свойств определителей вынося из k -й строки определителя $D_{5,1}$ множитель z^{m_k} , $k = 1, 2, 3, 4$, имеем

$$\begin{aligned} D_{5,1} &= z^{M_4} \begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} \\ 1 & z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} \end{vmatrix} = z^{M_4} \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} \end{vmatrix} \\ &= z^{M_4} \prod_{\substack{k > n, \\ k, n \in \{1, 2, 3, 4\}}} (z^{m_k} - z^{m_n}) = z^{M_4} D_4 \neq 0, \quad M_4 = \sum_{n=1}^4 m_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Для минора $D_{5,2}$ получаем

$$D_{5,2} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & w_1^{m_1} \\ w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} & w_1^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_3^{m_4} & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} & w_1^{m_4} \end{vmatrix} \cdot (-1),$$

откуда с учетом того, что $w_1^{m_k} = w_6^{m_k} = z^{5m_k}$, вынося z^{2m_k} из k -й строки определителя, находим

$$D_{5,2} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} \\ 1 & z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} \end{vmatrix} \cdot z^{M_4} = (-1)z^{2M_4}D_4. \quad (19)$$

Аналогичным образом выводятся следующие формулы:

$$D_{5,3} = z^{3M_4}D_4, \quad D_{5,4} = (-1)z^{4M_4}D_4, \dots, D_{5,k} = (-1)^{k-1}z^{kM_4}D_4 \neq 0, \\ k = 1, 2, \dots, 5, \quad M_4 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4.$$

5. Исследование уравнения на собственные значения

Учитывая формулы (7), (8), подставим формулы (16)–(20) в уравнение (15):

$$\frac{f(s)}{(as)^{n_1}D_4} = \left[w_1^{n_1}e^{aw_1s\pi} - \frac{A_{4,1}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) \right] z^{M_4} \\ - \left[w_2^{n_1}e^{aw_2s\pi} - \frac{A_{4,2}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) \right] z^{2M_4} + \dots - \left[w_4^{n_1}e^{aw_4s\pi} - \frac{A_{4,4}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) \right] z^{4M_4} \\ + \left[w_5^{n_1}e^{aw_5s\pi} - \frac{A_{4,5}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) \right] z^{5M_4} = 0, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (21)$$

Индикаторная диаграмма уравнения (21) представляет собой правильный пятиугольник, вершинами которого являются точки w_k , $k = 1, 2, \dots, 5$, из (4). При этом корни уравнения (21) могут находиться только в пяти секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого пятиугольника. Поэтому из общей теории нахождения корней функций вида (21) (см. [18, гл. 12]) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Уравнение на собственные значения оператора (1)–(3) в секторе 1, соответствующем отрезку $[w_1; w_2]$ индикаторной диаграммы, имеет следующий вид:

$$g_1(s) = (as)^{n_1}D_4z^{M_4} \left\{ \left[w_1^{n_1}e^{aw_1s\pi} - \frac{A_{4,1}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) \right] - z^{M_4} \left[w_2^{n_1}e^{aw_2s\pi} - \frac{A_{4,2}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) \right] \right\} = 0. \quad (22)$$

Чтобы найти корни функции $g_1(s)$ из (22), перепишем ее в следующем виде:

$$g_1(s) = g_{10}(s) - \frac{1}{5a^4s^4}g_{1,4}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) = 0, \quad (23)$$

$$g_{10}(s) = w_1^{n_1} e^{aw_1 s \pi} - z^{M_4} w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi}, \quad (24)$$

$$g_{1,4}(s) = A_{4,1}^{n_1}(\pi, s) - z^{M_4} A_{4,2}^{n_1}(\pi, s). \quad (25)$$

Поделив уравнения (23)–(25) на $w_1^{n_1} e^{aw_1 s \pi} \neq 0$, получаем

$$\tilde{g}_1(s) = \tilde{g}_{10}(s) - \frac{1}{5a^4 s^4} \tilde{g}_{1,4}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) = 0, \quad (26)$$

$$\tilde{g}_{10}(s) = e^{a(w_1 - w_2)s\pi} - z^{M_4} w_2^{n_1} w_1^{-n_1}, \quad (27)$$

$$\tilde{g}_{1,4}(s) = w_1^{-n_1} e^{-aw_2 s \pi} A_{4,1}^{n_1}(\pi, s) - z^{M_4} w_1^{-n_1} e^{-aw_2 s \pi} A_{4,2}^{n_1}(\pi, s). \quad (28)$$

Основное приближение уравнения (26)–(28) имеет вид $\tilde{g}_{10}(s) = 0$. Учитывая, что $z = w_2 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $w_1 = 1$, видим, что $\tilde{g}_{10}(s) = 0$ только в следующем случае:

$$\begin{aligned} \exp[a\pi s(w_1 - w_2)] &= z^{M_4} z^{n_1} e^{2\pi i k} \\ \iff \exp[a\pi s(w_1 - w_2)] &= \exp\left(\frac{2\pi i}{5}(M_4 + n_1) + 2\pi i k\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Тем самым корни основного приближения уравнения (26)–(28) (т. е. корни уравнения $\tilde{g}_{10}(s) = 0$) находятся в явном виде по формуле

$$s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1 - w_2)}, \quad \tilde{k} = k + \frac{1}{5}(M_4 + n_1), \quad M_4 = \sum_{n=1}^4 m_n.$$

6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(3)

Из общей теории нахождения асимптотики корней целых функций вида (26)–(28) (см. [18, гл. 12; 19–21]) следует, что справедлива

Теорема 4. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2) (с условием (3) суммируемости потенциала) в секторе 1 индикаторной диаграммы имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1 - w_2)} + \frac{2id_{4,k,1}}{a(w_1 - w_2)\tilde{k}^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right), \quad \tilde{k} = k + \frac{1}{5}(M_4 + n_1), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (29)$$

Чтобы доказать теорему 4, достаточно вычислить коэффициенты $d_{4,k,1}$ из (29) в явном виде. Применяя формулы (9), (10) для выражений $A_{4,1}^{n_1}(\pi, s)$ и

$A_{4,2}^{n_1}(\pi, s)$ из (28) и формулу Тейлора, находим

$$A_{4,1}^{n_1}(\pi, s)|_{s_{k,1}} = \left[w_1 w_1^{n_1} e^{aw_1 s \pi} \int_0^\pi q(t) \exp((w_1 - w_2)as\pi) dt_{a11} + w_2 w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} \int_0^\pi q(t) \exp((w_1 - w_2)as\pi) dt_{a12} + \bar{o}(1) \right]_{s_{k,1}}, \quad (30)$$

$$A_{4,2}^{n_1}(\pi, s)|_{s_{k,1}} = \left[w_1 w_1^{n_1} e^{aw_1 s \pi} \int_0^\pi q(t) \exp((w_2 - w_1)as\pi) dt_{a21} + w_2 w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} \int_0^\pi q(t) \exp((w_2 - w_1)as\pi) dt_{a22} + \bar{o}(1) \right]_{s_{k,1}},$$

$$e^{a(w_1 - w_2)s\pi}|_{s_{k,1}} = z^{M_4} z^{n_1} \left[1 + \frac{2\pi i d_{4,k,1}}{\tilde{k}^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) \right], \quad (31)$$

$$\frac{1}{s^4} \Big|_{s_{k,1}} = \frac{1}{2^4 i^4 \tilde{k}^4} a^4 (w_1 - w_2)^4 \left[1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^5}\right) \right]. \quad (32)$$

Подставляя формулы (29)–(32) в уравнения (26)–(28) и проводя необходимые преобразования, имеем

$$\begin{aligned} & \left[z^{M_4} z^{n_1} + z^{M_4} z^{n_1} \frac{2\pi i d_{4,k,1}}{\tilde{k}^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) - z^{M_4} z^{n_1} \right] \\ & - \frac{a^4 (w_1 - w_2)^4}{5a^4 2^4 i^4 \tilde{k}^4} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^5}\right) \right) \left\{ \left[w_1 e^{a(w_1 - w_2)s\pi} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a11} - w_2 w_2^{n_1} z^{M_4} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a22} \right] - \left[w_1 z^{M_4} e^{a(w_1 - w_2)s\pi} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a21} + w_2 z^{n_1} z^{M_4} z^{M_4} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a12} \right] \right\} \Big|_{s=s_{k,1, \text{очн}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) = 0. \quad (33) \end{aligned}$$

Из формул (4), (5) получаем

$$w_1 - w_2 = 1 - z = 1 - e^{\frac{2\pi i}{5}} = e^{\frac{\pi i}{5}} [e^{-\frac{\pi i}{5}} - e^{\frac{\pi i}{5}}] = (-2i) e^{\frac{\pi i}{5}} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33) и учитывая, что $\left(\int_0^\pi \dots \right)_{a11} = \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a22} = \int_0^\pi q(t) dt_{a11}$,
ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} d_{4,k,1} &= \frac{1}{5\pi} \frac{1}{z^{M_4} z^{n_1} 2^5} (w_1 - w_2)^4 \left\{ \left[w_1 z^{M_4} z^{n_1} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a11} - w_2 z^{M_4} z^{n_1} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a22} \right] + \left[w_2 z^{M_4} z^{-M_4} z^{n_1} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a12} - w_1 z^{M_4} z^{M_4} z^{n_1} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a21} \right] \right\} \Big|_{s=s_{k,1, \text{очн}}}. \quad (35) \end{aligned}$$

Второе выражение в (35) равно

$$\begin{aligned}
& \left[w_2 z^{n_1} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a12} - w_1 z^{2M_4} z^{n_1} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a21} \right] \Big|_{s=s_{k,1,\text{осн}}} \\
&= \left[z \cdot z^{n_1} \int_0^\pi q(t) e^{a(w_1-w_2)st} dt_{a12} - z^{n_1} \cdot z^{2M_4} \int_0^\pi q(t) e^{a(w_1-w_2)st} dt_{a21} \right] \Big|_{s=\frac{2i\tilde{k}}{a(w_1-w_2)}} \\
&= z^{n_1} z^{M_4} e^{\frac{\pi i}{5}} e^{\frac{\pi i}{5}} e^{-\frac{2\pi i}{5} M_4} \int_0^\pi q(t) \exp \left[at 2i \frac{\tilde{k}}{a} \right] dt - z^{n_1} z^{M_4} e^{\frac{2\pi i}{5} M_4} \int_0^\pi q(t) \exp[-2\tilde{k}ti] dt \\
&= e^{\frac{\pi i}{5}} z^{n_1} z^{M_4} 2i \int_0^\pi q(t) \sin \left[2\tilde{k}t + \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} M_4 \right] dt_{n_1}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Из (35), (36) находим

$$d_{4,k,t} = \frac{(w_1 - w_2)^5}{5\pi \cdot 2^5} \left[\int_0^\pi q(t) dt_{a11} - \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{5})} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{n_1} \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (37)$$

$M_4 = \sum_{k=1}^4 m_k$, $\tilde{k} = k + \frac{M_4 + n_1}{5}$, интеграл $\left(\int_0^\pi \dots \right)_{n_1}$ определен в (37).

Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

Изучая другие сектора индикаторной диаграммы и соответствующие уравнения на собственные значения, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. 1. В секторе 2 индикаторной диаграммы, биссектриса которого является серединным перпендикуляром к отрезку $[w_2; w_3]$, асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(3) имеет следующий вид:

$$s_{k,2} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad (38)$$

где $s_{k,1}$ определены в (29), (36), (37).

2. Для остальных секторов индикаторной диаграммы справедливы формулы

$$s_{k,n} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{5}(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, 5, \quad s_{k,n+5} = s_{k,n}, \quad n = 1, 2, \dots, 5. \quad (39)$$

3. Собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) находятся по формуле

$$\lambda_{k,n} = s_{k,n}^5, \quad n = 1, 2, \dots, 5, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

С помощью формул (29) и (36)–(40) устанавливается следующая теорема о поведении собственных функций дифференциального оператора (1)–(3).

Теорема 6. Собственные функции $f_k(x, s_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, дифференциального оператора (1)–(3), соответствующие собственным значениям λ_k из (39), (40), вычисляются по формуле

$$f_k(x, s_k) = \begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0, s) & y_2^{(m_1)}(0, s) & \dots & y_4^{(m_1)}(0, s) & y_5^{(m_1)}(0, s) \\ y_1^{(m_2)}(0, s) & y_2^{(m_2)}(0, s) & \dots & y_4^{(m_2)}(0, s) & y_5^{(m_2)}(0, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m_4)}(0, s) & y_2^{(m_4)}(0, s) & \dots & y_4^{(m_4)}(0, s) & y_5^{(m_4)}(0, s) \\ y_1(x, s) & y_2(x, s) & \dots & y_4(x, s) & y_5(x, s) \end{vmatrix}. \quad (41)$$

Используя (11), перепишем формулу (41) в следующем виде:

$$f_k(x, s_k) = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & \dots & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \\ y_1(x, s) & y_2(x, s) & \dots & y_4(x, s) & y_5(x, s) \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Формула (42) позволяет аналогично работам [16, 22] вычислить асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1)–(3).

7. Заключение

Граничные условия (2) задают целое семейство дифференциальных операторов пятого порядка с суммируемым потенциалом. Полученные нами формулы для собственных значений и собственных функций можно применять для получения регуляризованных следов этих операторов и для исследования свойств базисности собственных функций. Получение формул (6)–(11) позволяет аналогичным образом исследовать и операторы более высоких порядков с суммируемыми коэффициентами, при этом с возрастанием порядка дифференциального оператора сложность вычислений возрастает многократно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Мат. сб. 1967. Т. 72, № 2. С. 293–310.
2. Чернятин В. А. Асимптотики высшего порядка спектра оператора Штурма — Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 2. С. 206–215.
3. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 4. С. 558–566.
4. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 698–723.
5. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1986. № 6. С. 3–6.
6. Gottlieb H. P. W. Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 132. P. 123–137.
7. Будаев В. Д. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 223, № 6. С. 941–952.

8. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. АН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
9. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1427.
10. Митрохин С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.
11. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора десятого порядка с суммируемым потенциалом // Успехи современ. естествознания. 2010. № 3. С. 146–149.
12. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 2009. № 3. С. 14–17.
13. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1808–1811.
14. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
15. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
16. Митрохин С. И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с интегрируемыми коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.
17. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
18. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
19. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб. 1968. Т. 65, № 4. С. 558–566.
20. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.
21. Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабасси Ю. О. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1346–1348.
22. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. 2008. № 8. С. 172–187.

Статья поступила 5 мая 2016 г.

Митрохин Сергей Иванович
НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,
Ленинские Горы, 6, Москва 119234
mitrokhin-sergey@yandex.ru

ON A STUDY OF THE SPECTRUM
OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR THE FIFTH-ORDER DIFFERENTIAL
OPERATOR WITH INTEGRABLE POTENTIAL

S. I. Mitrokhin

Abstract: A boundary value problem for the fifth-order differential operator with separated boundary conditions is considered. The potential of the operator is a summable function on the segment. For large values of the spectral parameter we obtain the asymptotic behavior of the corresponding differential equation. The equation on eigenvalues of the considered operator and the indicator diagram of this equation are studied. A new method for finding an asymptotics of eigenvalues of the studied operator is offered.

Keywords: boundary value problem, differential operator, separated boundary conditions, summable potential, asymptotics of the eigenvalues, eigenfunction.

REFERENCES

1. Sadovničii V. A., "The trace of ordinary differential operators of high order," *Sb. Math.*, **1**, No. 2, 263–288 (1967).
2. Chernyatin V. A., "Higher-order spectral asymptotics for the Sturm–Liouville operator," *Differ. Equ.*, **38**, No. 2, 217–227 (2002).
3. Lidskii V. B. and Sadovničii V. A., "Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions," *Sb. Math.*, **4**, No. 4, 519–527 (1968).
4. Il'in V. A., "Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator," *Math. Notes*, **22**, No. 5, 870–882 (1977).
5. Mitrokhin S. I., "Formulas for the regularized traces of the second order differential operators with discontinuous coefficients," *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **41**, No. 6, 1–5 (1986).
6. Gottlieb H. P. W., "Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients," *J. Math. Anal. Appl.*, **132**, 123–137 (1988).
7. Budaev V. D., "On the unconditional basis property on a closed interval of systems of eigen and adjoint functions for the operator of the second order with discontinuous coefficients," *Differential equations*, **223**, No. 6, 941–952 (1987).
8. Mitrokhin S. I., "Spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous positive weight function," *Dokl. Math.*, **56**, No. 2, 652–654 (1997).
9. Vinokurov V. A. and Sadovnichii V. A., "Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm–Liouville problem on a segment with integrable potential," *Differ. Uravn.*, **34**, No. 10, 1423–1426 (1998).
10. Mitrokhin S. I., "On spectral properties of a differential operator with summable coefficients and retarded argument," *Ufim. Mat. Zh.*, **3**, No. 4, 95–115 (2011).
11. Mitrokhin S. I., "The asymptotics of the eigenvalues of a tenth-order differential operator with integrable potential," *Uspekhi Sovrem. Estestvozn.*, No. 3, 146–149 (2010).
12. Mitrokhin S. I., "The asymptotics of the eigenvalues of a fourth-order differential operator with summable coefficients," *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **64**, No. 3, 102–104 (2009).

-
13. *Mitrokhin S. I.*, "On the spectral properties of odd-order differential operators with integrable potential," *Differ. Equ.*, **47**, No. 12, 1833–1836 (2011).
 14. *Naimark M. A.*, *Linear differential operators* [in Russian], Nauka, Moscow (1969).
 15. *Fedoryuk M. V.*, *Asymptotic methods for linear ordinary differential equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
 16. *Mitrokhin S. I.*, "Spectral properties of boundary value problems for functional-differential equations with integrable coefficients," *Differ. Equ.*, **46**, No. 8, 1095–1103 (2010).
 17. *Levitan B. M. and Sargsyan I. S.*, *Introduction to the spectral theory* [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
 18. *Bellman R. and Cooke K. L.*, *Differential-difference equations* [Russian transl.], Mir, Moscow (1967).
 19. *Lidskii B. V. and Sadovnichii V. A.*, "Regularized sums of zeros of a class of entire functions," *Function. Anal. Appl.*, **1**, No. 2, 52–59 (1967).
 20. *Sadovnichii V. A. and Lyubishkin V. A.*, "Some new results in the theory of regularized traces of differential operators," *Differ. Uravn.*, **18**, No. 1, 109–116 (1982).
 21. *Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A., and Belabassi Yu. O.*, "On regularized sums of zeros of an entire function of some class," *Dokl. Math.*, **254**, No. 6, 1346–1348 (1980).
 22. *Mitrokhin S. I.*, "On spectral properties of a differential operator with integrable potential and smooth weight function," *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauch. Ser.*, No. 8 (1/67), 172–187 (2008).

Submitted May 5, 2016

Sergey Ivanovich Mitrokhin
NIVTs of Moscow State University,
Leninskie gory, 6, Moscow 119234, Russia
`mitrokhin-sergey@yandex.ru`