УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ
Том XXVIII 1997 №1

К ВИХРЕВОЙ ТЕОРИИ ВИНТА Н. Е. ЖУКОВСКОГО

В. С. Вождаев, Е. С. Вождаев

В развитие лопастной теории винта даны точные аналитические решения, исключающие операции численного интегрирования скоростей от полубесконечных винтовых вихрей.

Показано, что индуктивная скорость винта на несущей линии выражается рядом коэффициентов косинусных гармоник скорости, кратных числу лопастей.

Выяснилось, что гармоники скорости k-лопастного винта эквивалентны тем же гармоникам однолопастного винта, умноженным на число лопастей, что упрощает вычисления.

Первый член ряда представляет собой нулевую гармонику мгновенной скорости и выражается классическим решением Н. Е. Жуковского для индуктивной скорости винта с бесконечным числом лопастей. Второй член ряда — это коэффициент k-й гармоники скорости, третий — $2k$-й и т. д.

Установлено, что такое нарастание порядка гармоник приводит к их резкому падению и к быстрой сходимости ряда, особенно при большом числе лопастей.

Показано, что ядра этих коэффициентов допускают аналитическое интегрирование в пределах $0 - \infty$, дающее модифицированную функцию Бесселя первого порядка с аргументом, кратным порядку гармоники.

На основе полученных решений разработана «быстрая» программа аэродинамического расчета винта.

Даны примеры вычислений циркуляций, мгновенных скоростей и суммарных характеристик винта.

Статья содержит также краткий обзор фундаментальных исследований Н. Е. Жуковского, ставших основой последующего развития аэродинамики винтов, вертолетной науки и техники.

В развитие вихревой теории винта [1—6] найдено точное аналитическое решение задачи об индукции в лопастной теории.

Мгновенная индуктивная скорость в неподвижной точке выражается рядом Фурье по времени. Показано, что этот ряд содержит только кратные числу лопастей гармоники скорости.

Обнаружено следующее свойство поля мгновенных скоростей: гармоники скорости k - лопастного винта эквивалентны тем же гармоникам однолопастного винта, умноженным на число лопастей, что резко снижает объем вычислений.

Показано, что содержащиеся в коэффициентах гармоник интегралы на полубесконечном интервале вихревой системы представляют собой известные специальные функции. В коэффициентах косинусных гармоник — это модифицированная функция Бесселя первого порядка, а в синусных — известная функция Майера частного вида, что исключает операции численного интегрирования этих интегралов.

При вычислении мгновенной скорости на несущей линии лопасти ряд Фурье вырождается в обычный функциональный ряд, содержащий только коэффициенты косинусных гармоник, кратных числу лопастей.

Первым членом ряда является нулевая гармоника мгновенной скорости, представляющая собой классическое решение Н. Е. Жуковского для индуктивной скорости винта с бесконечным числом лопастей (дисковая теория). Второй член ряда, коэффициент k-й гармоники, включает главную долю влияния числа лопастей на индуктивную скорость. Последующие члены ряда, коэффициенты высоких гармоник ($2k$, $3k$, ...), резко падают, и ряд быстро сходится.

С увеличением числа лопастей количество учитываемых членов ряда уменьшается, объем вычислений сокращается и мгновенная скорость стремится к средней, определяемой дисковой теорией.

Полученное решение для мгновенной скорости устанавливает непосредственную аналитическую связь лопастной и дисковой теорий. В этом решении дисковая теория Н. Е. Жуковского стала составной частью аппарата лопастной теории.

На основании разработанного метода составлены алгоритм и программа аэродинамического расчета винта. Практическое применение этой программы показало, что она дает многократное снижение затрат машинного времени.

Перед изложением содержания данной статьи целесообразно коснуться фундаментальных идей Н. Е. Жуковского, положенных им в основание вихревой теории винта.

Именно в этой теории Н. Е. Жуковский, опираясь на свое учение о подъемной силе, заложил фундамент метода решений уравнений гидродинамики в задачах об обтекании несущих тел.

Суть метода заключается в следующем. Тело заменяется присоединенным вихрем с вектором интенсивностью $\vec{\Omega}_n$ и скоростью движения $\vec{U}$ (рис. 1). Воздействие тела на жидкость заменяется внешними силами $\vec{F}$, которые выражаются теоремой Н. Е. Жуковского о подъемной силе

$$\vec{F} = -\rho_c\left(\vec{\upsilon} - \vec{U}\right) \times \vec{\Omega}_n. \qquad (1)$$

Эти силы порождают свободные вихри с интенсивностью $\vec{\Omega}_c$, определяемой через изменения $\vec{\Omega}_n$ по теореме о постоянстве интен-

сивностей. Отделяющиеся от присоединенного вихря элементы свободных вихрей движутся вместе с жидкими частицами в поле абсолютных скоростей от всех вихрей:

$$\vec{\upsilon} = \mathrm{rot}\iiint \frac{\vec{\Omega}}{r_\tau} dxdydz,\ \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_n + \vec{\Omega}_c, \qquad (2)$$

r_τ — расстояние между точкой приложения скорости и элементом вихря.

Задача теперь заключается в том, чтобы определить интенсивность $\vec{\Omega}_n$. Для этого формулируются граничные условия на теле, а в общем случае и на вихревом следе, которым поле скоростей (2) должно удовлетворять. На основании этих условий составляется уравнение относительно искомых интенсивностей. Решение этого уравнения позволяет определить и поле скоростей (2), и погонные аэродинамические нагрузки (1).

В линейной вихревой теории винта движение свободных вихрей задано заранее, а удлинение лопасти принимается большим, поэтому используется граничное условие, вытекающее из равенства погонных нагрузок, вычисляемых по формуле (1) и по формуле экспериментальной аэродинамики через угол атаки профиля.

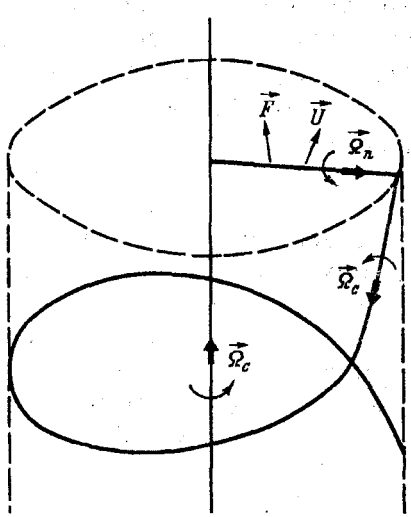


Рис. 1

В рамках принятой гидродинамической модели построенные Н. Е. Жуковским поля скоростей и нагрузок являются точными решениями уравнений гидродинамики. В этом нетрудно убедиться, обратившись к уравнению Гельмгольца для случая, когда на жидкость действуют внешние силы:

$$\mathrm{Helm}\,\vec{\Omega} = \frac{1}{\rho_c}\mathrm{rot}\,\vec{F}, \qquad \vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{\upsilon},$$

$$\mathrm{Helm}_{\vec{\upsilon}}\,\vec{\Omega} = \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\cdot\nabla\right)\vec{\Omega} - \left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\vec{\upsilon} + \vec{\Omega}\,\mathrm{div}\,\vec{\upsilon}.$$

Подставляя сюда силы Н. Е. Жуковского (1), приходим к уравнению Гельмгольца для свободных вихрей:

$$\mathrm{Helm}_{\vec{\upsilon}}\,\vec{\Omega}_c = \mathrm{Helm}_{\vec{U}}\,\vec{\Omega}_n - \left(\vec{\upsilon} - \vec{U}\right)\mathrm{div}\,\vec{\Omega}_n.$$

Это уравнение показывает, что интенсивности свободных вихрей, движущихся в поле $\vec{\upsilon}$, определяются изменениями интенсивности присоединенного вихря, движущегося со скоростями $\vec{U}$.

Из правой части уравнения следует, что в общем случае изменения $\vec{\Omega}_n$ происходят по длине присоединенного вихря и на его концах, где он заканчивается. Метод Н. Е. Жуковского находится в полном согласии с этими законами.

Конечно, гидродинамические модели тел во многих задачах сегодня значительно усложнились. На базе постулата Жуковского — Чаплыгина развились и более сложные формы выражения граничных условий, особенно в задачах неустановившегося обтекания со свободно деформируемыми вихревыми следами (см., например, [11], [12]).

Но базой развития аэродинамики несущих тел служат основополагающие принципы вихревой теории Н. Е. Жуковского. Поэтому эта теория и относится к числу крупнейших достижений механики жидкости в XX столетии.

Рассмотрим теперь ключевые моменты построения самой теории. В ее создании важную роль сыграли опыты Фламма, которые показали, что при достаточно большой скорости V набегающего на винт невозмущенного потока образуются стационарные винтовые вихри, располагающиеся практически по линиям, отмеченным концами лопастей частиц невозмущенного потока.

Этот факт стал допущением линейной теории. Для выяснения его физических причин Н. Е. Жуковский дал анализ самоиндукции винтового вихря с циркуляцией Г, углом наклона β к плоскости диска винта и с конечным радиусом ядра ε (на тонком вихре скорость самоиндукции обращается в бесконечность).

Он показал, что скорость движения вихря перпендикулярна соприкасающейся с вихрем плоскости и равна скорости вихревого кольца с радиусом, равным радиусу кривизны винтового вихря $\rho_в$ при тех же величинах ε и Г:

$$\upsilon_в = -\frac{\Gamma}{4\pi\rho_в}\ln\frac{\varepsilon}{2\rho_в}. \qquad (3)$$

Двигаясь с этой скоростью, элемент вихря смещается в направлении своей оси и в направлении вращения винта. Первое движение не меняет формы вихря, а второе — придает ему вращение вокруг оси винта со скоростью $\upsilon_в/\sin\beta$.

Для того чтобы винтовой вихрь с заданным углом β сохранял стационарное положение относительно лопасти, необходимо, чтобы эта скорость равнялась окружной скорости конца лопасти:

$$\upsilon_в = \omega R\sin\beta.$$

Подставив сюда выражение (3), Н. Е. Жуковский определил условие, которому должен удовлетворять сам вихрь, чтобы его стационарность обеспечивалась:

$$\ln\bar{\varepsilon} = \ln 2\bar{\rho}_в - \frac{4\pi}{\bar{\Gamma}}\bar{\rho}_в \sin\beta, \qquad (4)$$

где

$$\rho_в = \frac{1}{\cos^2\beta}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\bar{V}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon/R,$$

$$\bar{\rho}_в = \rho_в/R, \quad \bar{V} = V/\omega R, \quad \bar{\Gamma} = \Gamma/\omega R^2.$$

Из приведенного анализа следуют важные выводы. Выяснилось, что стационарность вихря обусловлена его свойством изменять толщину ядра в зависимости от $\bar{\Gamma}$ и $\bar{V}$. Если величина $\bar{\Gamma}$ изменяется, то вихрь реагирует на это изменением ε, причем так, что скорость самоиндукции сохраняется и шаг винтовой линии оказывается зависящим только от $\bar{V}$.

С увеличением $\bar{V}$ кривизна винтовой линии уменьшается, но, несмотря на это, скорость самоиндукции возрастает, так как происходит процесс уменьшения толщины ядра. Следует отметить, что скорость самоиндукции винтового вихря весьма велика: она соизмерима со скоростью полета $\bar{V}$. Обоснованность допущения линейной теории о форме свободных вихрей доказана.

Но дело не только в этом. Анализ Н. Е. Жуковского стал исходным пунктом исследований о движении свободных вихрей в нелинейных задачах, в которых необходимо вычислять скорости самоиндукции на дискретных криволинейных вихрях, толщины которых также подлежат определению. В первую очередь это относится к задачам, в которых нелинейные вихревые системы обладают свойством стационарности или близки ему. Исследования по нелинейной теории, в которой использовалась модель криволинейного вихря конечной толщины, были начаты В. Э. Баскиным [15] и продолжены В. А. Головкиным и его группой (В. М. Щеглова, А. А. Масленников). В результате этих усилий был разработан метод аэродинамического расчета винта со свободно деформируемым вихревым следом на режимах осевого и косого обтекания. На рис. 2 дан пример расчета нелинейного следа винта с коэффициентом силы тяги $C_T = 0{,}00415$ на режиме висения.

Большой объем исследований по нелинейной теории выполнен С. М. Белоцерковским и его коллегами (М. И. Ништом, Б. Е. Локтевым, Б. С. Крицким; см., например, [16]).

Вихревая теория Н. Е. Жуковского содержит также очень важное с теоретической или практической точек зрения решение задачи о поле скоростей винта. Н. Е. Жуковский отмечал, что истинная (мгновенная) скорость в неподвижной точке пространства меняется по времени с

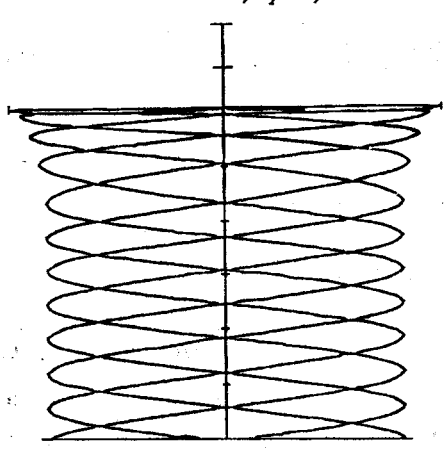


Рис. 2

высокой частотой и эту скорость можно определить на основе полученных им решений, «но анализ этот вышел бы очень сложным».

Поэтому он обратился к определению средних скоростей, так как они представляют главный интерес и показываются анемометрами и микроманометрами. Для решения этой задачи он ввел в анализ гидродинамическую модель винта с бесконечным числом лопастей. Здесь он осуществил переход к тонким вихрям. Винт был представлен цилиндрическим слоем элементарных винтовых вихрей, тонким круглым диском радиальных вихрей и центральным вихрем. Разложив слой винтовых вихрей на два слоя — по образующим цилиндра и по параллельным кругам, Н. Е. Жуковский получил изящное решение. В частности, для компонент скорости на диске — осевой и окружной были получены следующие результаты:

$$\bar{v}_0 = -\frac{k\bar{\Gamma}}{4\pi\bar{V}}, \quad \bar{v}_\tau = \frac{k\bar{\Gamma}}{4\pi\bar{r}}. \tag{5}$$

Здесь $\bar{\Gamma}$ — циркуляция присоединенного вихря, $\bar{r}$ — радиус точки приложения скорости. Формулы (5) справедливы для любого закона изменения циркуляции по радиусу лопасти, скорости $\bar{v}_0(\bar{r})$ и $\bar{v}_\tau(\bar{r})$ будут зависеть только от циркуляции $\bar{\Gamma}(\bar{r})$ на том же радиусе. Из формул (5) следует также, что геометрическая сумма этих скоростей перпендикулярна винтовой линии, отходящей от радиуса $\bar{r}$. Переход к тонким вихрям впоследствии осуществил и Л. Прандтль в своей теории несущей линии крыла конечного размаха (1918). С тех пор схема несущей линии вошла и в лопастную теорию винта.

Лопастная теория. Практическая необходимость развития лопастной теории обусловлена ее способностью точнее оценивать аэродинамические нагрузки на лопасти, особенно на концевой ее части, что ценно для проектирования винта с лучшими аэродинамическими характеристиками. Поэтому, начиная с В. П. Ветчинкина, усилия в этом направлении предпринимались многими учеными. Завершенный современный вид лопастная теория приобрела в результате работ Г. И. Майкапара и В. В. Келдыш [6], [7], которые довели ее до практических приложений, включавших и аэродинамическое проектирование.

В лопастной теории осевая мгновенная скорость свободных вихрей винта определяется соотношением

$$\bar{\upsilon} = \frac{k}{4\pi \bar{V}} \int_{\bar{\rho}_0}^{1} \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}} \tilde{\upsilon}\, d\bar{\rho}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{\upsilon} = \frac{\bar{V}}{k} \sum_{\nu=1}^{k} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\rho}^2 - \bar{\rho}\bar{r}\cos(\theta - \psi + \delta_\nu - \vartheta)}{\left[\bar{V}^2\vartheta^2 + \bar{\rho}^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{\rho}\bar{r}\cos(\theta - \psi + \delta_\nu - \vartheta)\right]^{3/2}} d\vartheta . \tag{7}$$

Здесь ν — номер лопасти ($\nu = 1, 2, \ldots, k$); $\bar{\rho}$ — текущий радиус лопасти; θ — азимутальный угол лопасти $\nu = 1$; $\bar{r}$ и ψ — радиус и азимутальный угол точки приложения скорости; $\delta_\nu = 2\pi(\nu - 1)/k$; ϑ — азимутальный угол элемента свободного вихря (рис. 3).

Расчет скоростей выполняется численным способом. Но важно получить и аналитические решения, чтобы анализ был не очень сложным. Отысканию простых точных аналитических решений (7) и посвящена данная работа.

Известно, что такая задача не без оснований считалась безнадежной*. Просвет обнаружился, когда теория Н. Е. Жуковского была рассмотрена под углом зрения лопастной теории. Действительно, решением (5) Н. Е. Жуковский фактически вычислил нулевую гармонику мгновенной скорости, которую можно немедленно получить из соотношений (7) и (6):

$$\tilde{\upsilon}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\bar{V}}{k} \sum_{\nu=1}^{k} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\rho}^2 - \bar{\rho}\bar{r}\cos(\theta - \psi + \delta_\nu - \vartheta)}{\left[\bar{V}^2\vartheta^2 + \bar{\rho}^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{\rho}\bar{r}\cos(\theta - \psi + \delta_\nu - \vartheta)\right]^{3/2}} d\vartheta \right\} d\theta =$$

$$= \frac{\bar{V}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\rho}^2 - \bar{\rho}\bar{r}\cos\theta}{\left[\bar{V}^2\vartheta^2 + \bar{\rho}^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{\rho}\bar{r}\cos\theta\right]^{3/2}} d\vartheta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho}^2 - \bar{\rho}\bar{r}\cos\theta}{\bar{\rho}^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{\rho}\bar{r}\cos\theta}\, d\theta = \begin{cases} 1 & (\bar{\rho} > \bar{r}), \\ 0 & (\bar{\rho} < \bar{r}). \end{cases} \tag{8}$$

Подставив (8) в (6) вместо (7), сразу получим формулу Н. Е. Жуковского (5):

---

* Г. И. Майкапар отметил, что попытки получения аналитических решений предпринимались, однако результаты оказывались сложнее прямого вычисления (7) и поэтому практического применения не нашли.

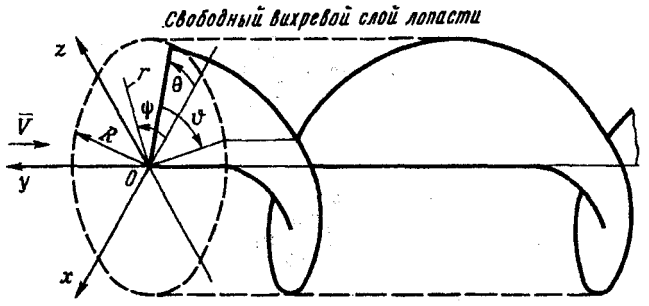


Рис. 3

$$\bar{\upsilon}_0 = \frac{k}{4\pi\bar{V}} \int_{\bar{r}}^{1} \frac{d\bar{\Gamma}(\bar{\rho})}{d\bar{\rho}} d\bar{\rho} = -\frac{k\bar{\Gamma}(\bar{r})}{4\pi\bar{V}}.$$

Простота результата (8) для нулевой гармоники мгновенной скорости дала основание предположить, что несложные аналитические решения существуют и для других гармоник.

Поэтому ставится задача — продолжить анализ Н. Е. Жуковского и вычислить все гармоники мгновенной скорости.

Гармоники мгновенной скорости. Представим скорость (6) в виде ряда Фурье:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{k} \left[\bar{\upsilon}_n^c \cos n(\theta - \psi + \delta_\nu) + \bar{\upsilon}_n^s \sin n(\theta - \psi + \delta_\nu) \right] \right\}. \qquad (9)$$

Можно показать, что если номер n не кратен числу лопастей ($n \neq mk$, $m = 1, 2, 3, \ldots$), то суммирование по ν дает нуль. Следовательно, мгновенная скорость винта выражается только кратными числу лопастей гармониками ($n = mk$), что ясно и наперед.

Теперь ряд (9) будет иметь привычный вид:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\upsilon}_{mk}^c \cos mk(\theta - \psi) + \bar{\upsilon}_{mk}^s \sin mk(\theta - \psi) \right\}. \qquad (10)$$

В случае пятилопастного винта, например, мгновенная скорость будет содержать пятую, десятую и т. д. гармоники. Из ряда (10) следует важное свойство поля скоростей: гармоники k-лопастного винта равны тем же гармоникам однолопастного винта, умноженным на число лопастей. Поэтому достаточно вычислять гармоники скорости только от одной лопасти.

Мгновенная скорость на несущей линии. При $\theta = \psi$ ряд Фурье (10) превращается в обычный функциональный ряд коэффициентов косинусных гармоник:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\upsilon}^c_{mk}, \tag{11}$$

где

$$\bar{\upsilon}^c_{mk} = \frac{k}{4\pi\bar{V}} \int_{\bar{\rho}_0}^{1} \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}} \tilde{\upsilon}^c_{mk} d\bar{\rho}. \tag{12}$$

Ядра $\tilde{\upsilon}^c_{mk}$ представляют собой коэффициенты косинусных гармоник функции (7) :

$$\tilde{\upsilon}^c_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\bar{V}}{k\bar{r}} \sum_{\nu=1}^{k} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}\cos\left(\theta - \psi + \delta_\nu - \vartheta\right)}{\left[\left(\frac{\bar{V}}{\bar{r}}\right)^2 \vartheta^2 + 1 + \tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\rho}\cos\left(\theta - \psi + \delta_\nu - \vartheta\right)\right]^{3/2}} d\vartheta \right\} \times$$

$$\times \cos mk\left(\theta - \psi + \delta_\nu\right) d\theta = \frac{\bar{V}}{\pi\bar{r}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}\cos\theta}{\left[\left(\frac{\bar{V}}{\bar{r}}\right)^2 \vartheta^2 + 1 + \tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\rho}\cos\theta\right]^{3/2}} \times$$

$$\times \cos mk\left(\theta + \vartheta\right) d\vartheta\, d\theta = \frac{\bar{V}}{\pi\bar{r}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}\cos\theta}{\left[\left(\frac{\bar{V}}{\bar{r}}\right)^2 \vartheta^2 + 1 + \tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\rho}\cos\theta\right]^{3/2}} \times$$

$$\times \cos mk\theta \cos mk\vartheta\, d\vartheta\, d\theta.$$

Теперь аналитическое интегрирование в пределах 0 — ∞ реализуется:

$$\tilde{\upsilon}^c_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{\tilde{\rho}^2 - 1}{\tilde{L}^2}\right) u K_1(u) \cos mk\theta\, d\theta, \tag{13}$$

где

$$K_1(u) = u \int_0^{\infty} \frac{\cos\vartheta}{\left(\vartheta^2 + u^2\right)^{3/2}} d\vartheta, \tag{14}$$

$$u = mk\tilde{L}/\left(\overline{V}/\overline{r}\right), \tag{15}$$

$$\tilde{L} = \sqrt{\left(1 + \tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\rho}\cos\theta\right)},\ \ \tilde{\rho} = \overline{\rho}/\overline{r}.$$

Интересно, что выражение (14) есть известное косинус-преобразование Фурье, дающее модифицированную функцию Бесселя первого порядка $K_1(u)$ по аргументу (15). График функции $uK_1(u)$ из (13) показан на рис. 4. С ростом аргумента u она плавно убывает от единицы, стремясь к нулю.

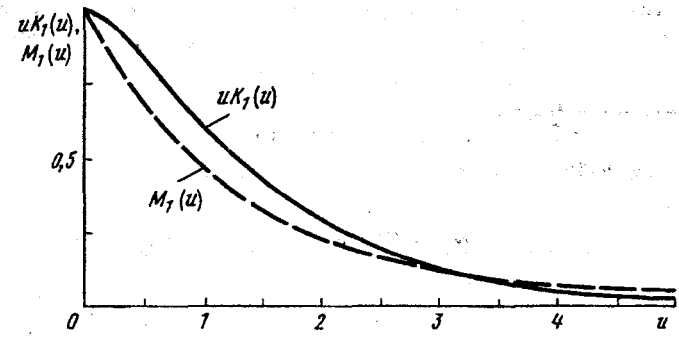


Рис. 4

Для удобства анализа приведем функцию (13) к виду

$$\tilde{\upsilon}^c_{mk} = \upsilon^c_{mk} + \Delta\upsilon^c_{mk}, \tag{16}$$

где

$$\upsilon^c_{mk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\tilde{\rho}^2 - 1}{\tilde{L}^2}\cos mk\theta d\theta, \tag{17}$$

$$\Delta\upsilon^c_{mk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\tilde{\rho}^2 - 1}{\tilde{L}^2}\left[uK_1(u) - 1\right]\cos mk\theta d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} uK_1(u)\cos mk\theta d\theta. \tag{18}$$

Интеграл (17) вычисляется элементарно:

$$\upsilon^c_{mk} = \begin{cases} \tilde{\rho}^{-mk} & (\tilde{\rho} > 1), \\ 0 & (\tilde{\rho} = 1), \\ -\tilde{\rho}^{mk} & (\tilde{\rho} < 1). \end{cases} \tag{19}$$

Интересно, что в отличие от интегрального выражения ядра (7), содержащего известную гиперболическую особенность, гармоники

функции (7) особенностей не имеют. Следует только учесть, что при $\tilde{\rho} = 1$ первое слагаемое (18) обращается в нуль. Причина такого свойства заключается в том, что при вычислении коэффициентов Фурье (13) интегрирование по аргументу θ ликвидирует особенность. Поэтому интегралы (12) существуют в прямом смысле, а не в смысле главного значения, как интегральное соотношение для мгновенной скорости (6).

В связи с этим обстоятельством можно, следуя Н. Е. Жуковскому, дать мысленный образ произвольного члена ряда (11) в виде индуктивной скорости свободных вихрей воображаемого винта с бесконечным числом лопастей и с циркуляцией несущей линии, изменяющейся по закону $\cos m\mathrm{k}\theta$. С ростом числа m скорость, естественно, падает. Таким образом, можно полагать, что мгновенная скорость винта представляет собой сумму средних по времени скоростей бесконечного множества воображаемых винтов. Скорости этих винтов вычисляются на донышках цилиндров, сплошь заполненных вихрями, что и объясняет отсутствие особенностей функции (13).

Приведем мгновенную скорость (11) к виду

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_0 + \frac{k}{4\pi\overline{V}} \int_{\rho_0}^{1} \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}} \upsilon_k^c d\bar{\rho} + \frac{k}{4\pi\overline{V}} \int_{\rho_0}^{1} \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}} \Delta\upsilon_k^c d\bar{\rho}, \tag{20}$$

где

$$\upsilon_k^c = \sum_{m=1}^{\infty} \upsilon_{mk}^c, \tag{21}$$

$$\Delta\upsilon_k^c = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\upsilon_{mk}^c. \tag{22}$$

Интересно, что ряд (21) сворачивается, превращаясь в простую функцию. Действительно, подставив (19) в (21), получим:

$$\upsilon_k^c = \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{\rho}^k - 1} & (\tilde{\rho} > 1), \\ 0 & (\tilde{\rho} = 1), \\ \dfrac{\tilde{\rho}^k}{\tilde{\rho}^k - 1} & (\tilde{\rho} < 1). \end{cases} \tag{23}$$

Первый член суммы (20) — это решение Н. Е. Жуковского (5). Второй член определяет главную долю влияния числа лопастей, так как разрывное ядро (23) учитывает влияние ближайших к расчетной точке элементов вихрей. Остальную долю влияния числа лопастей содержит последний член суммы, определяемый непрерывными гладкими функциями (18), который учитывает влияние удаленных вихрей. Именно этот член и содержит бесселеву функцию.

Оказалось, что функции (18) проще всего вычислять аналитически с помощью разложения функции $uK_1(u)$, дающего удобное решение интегралов (18) в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра.

Вследствие благоприятного поведения функции $uK_1(u)$ достаточно использовать небольшое число ее опорных значений (не более четырех), так что вводить в программу расчета таблицу бесселевой функции не требуется. Вследствие быстрого падения высоких гармоник можно вычислять небольшое число членов ряда (22). Расчеты показали, что более чем достаточно учитывать четыре члена этого ряда.

Аналитическое представление (23) дает возможность наглядно видеть влияние числа лопастей на мгновенную скорость. С ростом числа лопастей ядро (23) уменьшается и при $k \to \infty$ исчезает. Так же ведет себя и ядро Δv_k^c. Решение для мгновенной скорости (20) было введено в программу расчета винта по квазилинейной лопастной теории, в которой приближенно учитывается влияние индуктивных скоростей на шаг винтовых вихрей.

На рис. 5, 6 дано сравнение результатов расчета по дисковой и лопастной теориям циркуляций и индуктивных скоростей по радиусу лопасти винта, работающего на месте. Видны заметные различия этих характеристик вблизи конца лопасти.

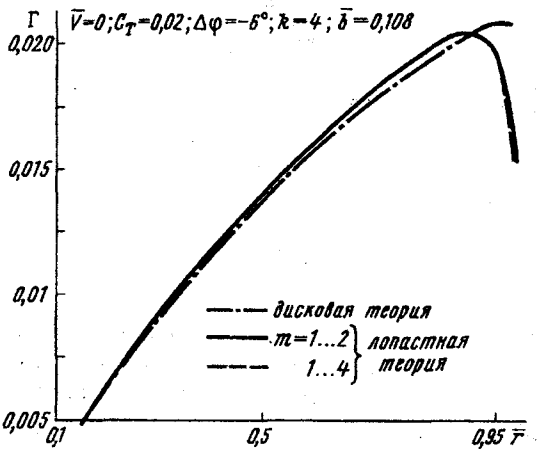


Рис. 5

На рис. 7 дано сравнение поляр винта, полученных по этим теориям, с данными эксперимента на модели винта в аэродинамической трубе Т-105 ЦАГИ. Поляры представлены в виде зависимостей коэффициента силы тяги C_T по коэффициенту крутящего момента m_k. Лопасти винта имеют линейную геометрическую крутку $\Delta\varphi = -6°$ и относительную хорду $\bar{b} = b/R = 0{,}108$. Результаты расчетов на базе численного метода определения скоростей и на основе аналитических решений, конечно, совпадают, но аналитический подход приводит к многократному снижению затрат машинного времени (в десятки раз).

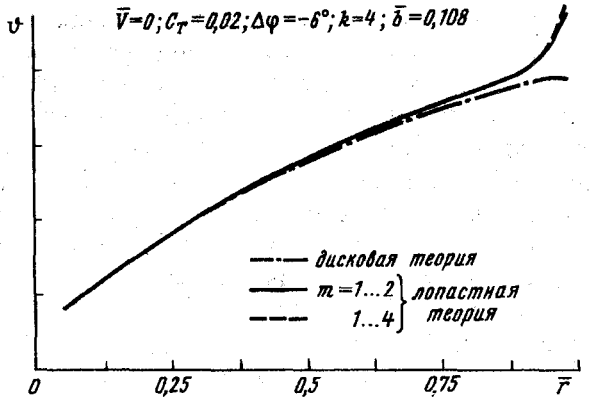


Рис. 6

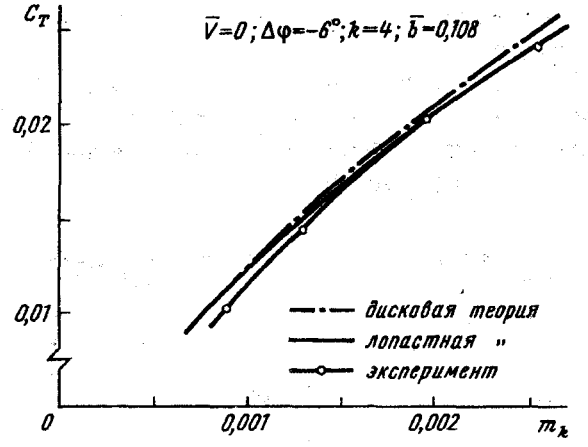


Рис. 7

Мгновенная индуктивная скорость в произвольной неподвижной точке ометаемого диска. В этом случае необходимо пользоваться рядом Фурье (10), определив предварительно коэффициенты синусных гармоник мгновенной скорости:

$$\bar{\upsilon}^s_{mk} = \frac{k}{4\pi\bar{V}} \int_{\bar{\rho}0}^{1} \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}} \tilde{\upsilon}^s_{mk}\, d\bar{\rho}\,, \tag{24}$$

$$\tilde{\upsilon}^s_{mk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\tilde{\rho}^2-1}{\tilde{L}^2} u\mathrm{M}_1(u)\cos mk\theta\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u\mathrm{M}_1(u)\cos mk\theta\, d\theta, \tag{25}$$

где

$$\mathrm{M}_1 = u\int_0^{\infty} \frac{\sin\vartheta}{\left(\vartheta^2+u^2\right)^{3/2}} d\vartheta. \tag{26}$$

Соотношение (26) представляет собой известное синус-преобразование Фурье, дающее G-функцию Майера частного вида:

$$M_1(u) = \frac{\pi}{2}\left[L_{-1}(u) - I_1(u)\right],$$

где $L_{-1}(u)$ — функция Струве, $I_1(u)$ — модифицированная функция Бесселя. График функции $M_1(u)$ приведен на рис. 4, откуда видно, что характер ее изменения мало отличается от функции $uK_1(u)$. Далее анализ идет по схеме определения косинусных гармоник, что дает возможность определить флуктуации мгновенной скорости свободных вихрей в любой точке $\bar{r}, \psi$.

При вычислении скорости не на несущей линии ($\theta \neq \psi$) к ряду (10) необходимо добавить мгновенную скорость, индуцируемую несущими линиями винта:

$$\bar{\upsilon}_н = -\frac{\bar{r}}{4\pi}\sum_{\nu=1}^{k}\int_{\bar{\rho}_0}^{1}\frac{\bar{\Gamma}(\bar{\rho})\sin(\theta - \psi + \delta_\nu)}{\left[\bar{\rho}^{-2} + \bar{r}^{-2} - 2\bar{\rho}\bar{r}\cos(\theta - \psi + \delta_\nu)\right]^{3/2}}d\bar{\rho}. \qquad (27)$$

Ряд Фурье этой функции состоит только из синусных гармоник скорости, кратных числу лопастей:

$$\bar{\upsilon}_н = \sum_{m=1}^{\infty}\bar{\omega}_{mk}\sin mk(\theta - \psi), \qquad (28)$$

где

$$\bar{\omega}_{mk} = -\frac{k}{2\pi\bar{r}^{-2}}\int_{\bar{\rho}_0}^{1}\bar{\Gamma}(\bar{\rho})\Im_{mk}d\bar{\rho}. \qquad (29)$$

Ядром интеграла (29) является функция

$$\Im_{mk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta\sin mk\theta)\frac{d\theta}{\tilde{L}^3}.$$

Можно показать, что это выражение является интегральным представлением функций Якоби частного вида:

$$\Im_{mk} = mk\begin{cases}\tilde{\rho}^{mk-1}P^{(mk,0)}_{-\frac{1}{2}}(x);\ x = \tilde{\rho}^2\ (\tilde{\rho} < 1),\\ \dfrac{1}{\tilde{\rho}^{mk+2}}P^{(mk,0)}_{-\frac{1}{2}}(x);\ x = \dfrac{1}{\tilde{\rho}^2}\ (\tilde{\rho} > 1),\end{cases} \qquad (30)$$

причем существует рекуррентная формула:

$$P_{-\frac{1}{2}}^{(mk+1,0)}(x) = \frac{1}{(2mk+1)x}\left[2mk(1+x)P_{-\frac{1}{2}}^{(mk,0)}(x) - (2mk-1)P_{-\frac{1}{2}}^{(mk-1,0)}(x)\right].$$

Следовательно, для определения функций (30) при любых значениях mk достаточно иметь их величины при $mk = 0$ и $mk = 1$:

$$P_{-\frac{1}{2}}^{(0,0)}(x) = \frac{2}{\pi}K(x);\ P_{-\frac{1}{2}}^{(1,0)}(x) = \frac{2}{\pi x}[K(x) - E(x)],$$

где $K(x)$ и $E(x)$ — полные эллиптические интегралы.

Переход к гармоникам скорости несущих линий удобен тем, что интегралы (29) существуют в смысле главного значения, в то время как величины самой скорости (27) при приближении расчетной точки к несущей линии неограниченно возрастают.

Завершая данную статью, следует сказать о влиянии фундаментальных работ Н. Е. Жуковского на становление и развитие вертолетной науки.

Еще в 1904 г., когда о вертолетах думали немногие энтузиасты, Н. Е. Жуковский поставил важную каноническую задачу об оптимизации диаметра несущего винта x по критерию максимума поднимаемого вертолетом груза при заданной мощности двигателя N [3].

Груз он представил в виде разности подъемной силы и суммы весов винта и силовой установки:

$$G = \alpha(Nx)^{2/3} - \beta x^3 - \gamma N,$$

где α — коэффициент аэродинамического совершенства винта, β и γ — коэффициенты весового совершенства винта и двигателя. Из этого выражения следует, что оптимальный диаметр $x_{опт}$, соответствующий максимуму величины груза, будет

$$x_{опт} = \left(\frac{2}{9}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3/7} N^{2/7}.$$

Видно, что $x_{опт}$ возрастает с улучшением аэродинамики винта и с повышением уровня его весового совершенства. Важно, что Н. Е. Жуковский не только обнаружил сильное влияние удельного веса двигателя γ на величину поднимаемого груза, но и дал количественную оценку этого влияния. Расчетами на основе данных лабораторных экспериментов и собственного прогноза развития авиадвигателей он показал, что переход от лучшего в те годы двигателя с $\gamma = 4$ к перспективному с $\gamma = 1$ увеличит грузоподъемность вертолета в четыре раза, и этот прогноз оправдался.

Н. Е. Жуковский показал, что существенные отклонения от $x_{опт}$ лишают вертолет возможности поднимать груз. Видно, например, что если ради увеличения подъемной силы винта чрезмерно увеличить его диаметр, то величина полезного груза станет отрицательной. Этот ценнейший анализ стал руководством в работе конструкторов вертолетов. Теоретическая база анализа была вскоре усилена работой В. П. Ветчинкина о наивыгоднейшем геликоптерном винте, которую Н. Е. Жуковский ввел в свою теорию [1].

Эти исследования положили начало развитию важного научного направления — разработке методов оптимизации параметров вертолетов по их целевым функциям и критериям эффективности ([13], [14] и др.).

Проблемы аэродинамики жесткого несущего винта в косом потоке были рассмотрены Н. Е. Жуковским еще в 1909 г. [4]. Он обнаружил, что, помимо аэродинамических сил, винт создает и опрокидывающие моменты по тангажу и крену. Равнодействующая аэродинамических сил винта смещается вперед и вбок — в сторону наступающей лопасти, и эти смещения зависят от режима работы винта. Возникла серьезная проблема управления этими силами и моментами, от решения которой зависела судьба вертолета. Но вскоре учеником Н. Е. Жуковского — Б. Н. Юрьевым был изобретен знаменитый «автомат-перекос», и эта проблема была решена как для жестких винтов, так и для винтов с шарнирным креплением лопастей к втулке.

Одним из самых выдающихся приложений вихревой теории Н. Е. Жуковского стала теория несущего винта вертолета. Фундамент дисковой и лопастной теорий несущего винта был заложен Г. И. Майкапаром в работах [8], [9]. На основании гидродинамических моделей скошенного вихревого цилиндра и скошенной винтовой вихревой поверхности им были сформулированы принципы построения этих теорий и даны основные соотношения.

С тех пор вихревая теория несущего винта получила интенсивное развитие в трудах Л. С. Вильдгрубе, В. Э. Баскина и других ученых (см., например, [15]). В лопастной теории упор был сделан на разработку эффективных численных методов расчета, а в дисковой теории — на получение аналитических решений с использованием аппарата теории потенциала и теории специальных функций. Итогом этих работ было создание методов аэродинамического расчета винта и систем винтов, получивших широкое применение в задачах аэродинамики, динамики, аэроупругости и прочности вертолетов, и эти методы продолжают развиваться.

Крупнейший ученый-механик Н. Е. Жуковский прозорливо оценил большое будущее вертолетной авиации, дал основополагающие труды в этом направлении и создал школу вертолетной науки и техники.

Путь этой школы — от первого вертолета Б. Н. Юрьева 1912 г. к первому рекордному вертолету ЦАГИ 1-ЭА 1930 г. и к современным вертолетам, таким, как Ми-26 и Ка-50 («Черная акула»), опережающего

уровня научно-технического совершенства. Результатами работ школы Н. Е. Жуковского можно только гордиться.

Авторы выражают признательность Г. И. Майкапару за обсуждение работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта (статьи 1—4). Полн. собр. соч., т. IV.—ГРАЛ.—1937.

2. Жуковский Н. Е. О присоединенных вихрях. Собр. соч., т. IV.—М.: ГИТТЛ.—1949.

3. Жуковский Н. Е. О полезном грузе, поднимаемом геликоптером. Полн. собр. соч., т. IV.—ГРАЛ.—1937.

4. Жуковский Н. Е. Опыт теоретического определения эффекта ветра, дующего в плоскости геликоптерного винта. Полн. собр. соч., т. IV.—ГРАЛ.—1937.

5. Ветчинкин В. П., Поляков Н. Н. Теория и расчет воздушного гребного винта.—М.: Оборонгиз, НКАП.—1940.

6. Майкапар Г. И., Лепилкин А. М., Халезов Д. В. Аэродинамический расчет винтов по вихревой теории // Труды ЦАГИ.—1940. Вып. 529.

7. Келдыш В. В. Проектирование и расчет воздушных винтов // Сб. работ по теории воздушных винтов.—БНИ ЦАГИ.—1958.

8. Майкапар Г. И. Приложения вихревой теории винта // Труды ЦАГИ.—1947. Вып. 613.

9. Майкапар Г. И. Вихревая теория несущего винта // Сб. работ по теории воздушных винтов.—БНИ ЦАГИ.—1958.

10. Вождаев Е. С. Лопастная теория несущего винта вертикально взлетающего аппарата в осевом потоке // Труды ЦАГИ.—1970. Вып. 1234.

11. Головкин В. А. Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформируемым вихревым следом // Ученые записки ЦАГИ.—1972. Т. III, № 3.

12. Головкин М. А. Метод решения задачи об отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося трехмерного тела // Ученые записки ЦАГИ.—1977. Т. VIII, № 2.

13. Тищенко М. Н., Некрасов А. В., Радин А. С. Вертолеты. Выбор параметров при проектировании.—М.: Машиностроение.—1978.

14. Шкадов Л. М., Вождаев Е. С., Анимица В. А., Головкин В. А., Каргопольцев В. А., Маврицкий В. И., Корнилов А. Б., Рыхлова С. С., Тюрин В. А. Применение методов САПР при формировании облика вертолета и разработке аэродинамической компоновки несущего винта // Труды ЦАГИ.—1983. Вып. 2186.

15. Баскин В. Э., Вильдгрубе Л. С., Вождаев Е. С., Майкапар Г. И. Теория несущего винта / Под ред. Н. К. Мартынова.—М.: Машиностроение.—1973.

16. Белоцерковский С. М., Локтев Б. Е., Ништ М. И. Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолетов.—М.: Машиностроение.—1992.

Рукопись поступила 28/X 1996 г.