

АФФИННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КАК ГРУПП ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТРЁХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Г.Б. Гольдина

студент, e-mail: zoloto13@list.ru

А.Н. Кабанов

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: kabanovan@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. С помощью метода Ямагучи дается представление как групп Ли аффинных преобразований всех трехмерных разрешимых групп Ли.

Ключевые слова: Аффинная структура, аффинное представление, трёхмерные разрешимые группы Ли.

Введение

В различных исследованиях группы Ли используются, будучи представленными в форме групп аффинных преобразований в аффинном пространстве. Имеются различные способы построения таких представлений. В этой статье строится аффинное представление 3-мерных разрешимых групп Ли методом Ямагучи [1, 2].

1. Аффинные представления групп Ли

Пусть G – вещественная связная группа Ли. Она допускает *аффинное представление*, если существует гомоморфизм

$$\alpha : G \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^n) \cong GL(\mathbb{R}^n),$$

$$G \ni g \mapsto \alpha(g) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n),$$

где $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ – группа аффинных преобразований n -мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, или, равно, общих линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Метод Ямагучи

Пусть дана n -мерная группа Ли G_n , её алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ с базисом $X_1, \dots, X_n$. Строим представление

$$\Lambda : \mathfrak{g}_n \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_n),$$

$$\Lambda(X_i) : \mathfrak{g}_n \ni X_j \rightarrow \Lambda(X_i)X_j \in \mathfrak{g}_n$$

такое, что

$$\Lambda(X_i)X_j - \Lambda(X_j)X_i = [X_i, X_j]. \quad (1)$$

Рассматриваем алгебру Ли группы Ли $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) : A - n \times n - \text{матрица}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Определяем представление

$$\rho : \mathfrak{g}_n \rightarrow \mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n),$$

полагая

$$\rho(X) = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda(X) & \begin{matrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad X = \sum_{i=1}^n t_i X_i \in \mathfrak{g}_n,$$

$$\rho(X_i) = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda(X_i) & e_i \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i.$$

Пусть $G(n)$ – аналитическая подгруппа группы $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ с алгеброй Ли $\rho(\mathfrak{g}_n)$. Тогда $G(n) \cong G_n$ и $G(n)$ действует просто транзитивно на $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n, 1)^{tr} : x^i \in \mathbb{R}\}$ (см. [1, 2]).

Имеем 1-параметрическую подгруппу $\exp(t_i X_i)$ группы Ли G_n , которой соответствует аффинное преобразование $\exp(t_i \rho(X))$: в $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n, 1) : x^i \in \mathbb{R}\}$:

$$G_n \ni \exp(t_i X_i) \rightarrow \exp(t_i \rho(X)) = e^{t_i \rho(X_i)} \in G(n),$$

$$e^{t_i \rho(X_i)} : \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ \hline 1 \end{pmatrix} \rightarrow e^{t_i \rho(X_i)} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ \hline 1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Преобразования (2) порождают аффинное представление $\alpha(G_n)$:

$$\alpha : G_n \rightarrow GL(\mathfrak{g}_n) \cong GL(\mathbb{R}^n),$$

$$\alpha(\exp(t_i \Lambda(X_i))) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = e^{t_i \Lambda(X_i)} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + t_i e_i, \quad t_i \in \mathbb{R},$$

$$\exp : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_n) \rightarrow GL(\mathfrak{g}_n)$$

группы Ли G_n с параметрами $(t_1, \dots, t_n)$, действующее просто транзитивно на $\mathbb{R}^3$, если, конечно, можно найти матрицы $\Lambda(X_i)$, удовлетворяющие условиям (1) [1].

3. Построение аффинных представлений 3-мерных групп Ли

Теорема 1. Любая связная 3-мерная разрешимая вещественная группа Ли G_3 имеет аффинное представление $\alpha(G_3)$, действующее просто транзитивно на $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Используем классификацию 3-мерных вещественных разрешимых алгебр Ли из [3].

1. $C_3 I$.

$$[X_i, X_j] = 0.$$

Здесь $\Lambda(X_i) = 0$, поэтому

$$\rho(X_i) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_i \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad \exp(t_i \rho(X_i)) = \left(\begin{array}{c|c} E & t_i e_i \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно, имеем аффинное представление абелевой группы $G_3 I$:

$$(x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x^1 + t_1, x^2 + t_2, x^3 + t_3).$$

2. $C_3 II$.

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \\ \Lambda(X_1) &= \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1 \rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right), \quad e^{t_2 \rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right),$$

$$e^{t_3 \rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 - t_3 x_2, x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, группа Ли $G_3 II$ имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 - t_3 x^2 + t_1, \\ \bar{x}^2 = x^2 + t_2, \\ \bar{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \tag{5}$$

3. $C_3 III$.

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1 \rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right), \quad e^{t_2 \rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-t_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (e^{-t_3}x^1, x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, группа Ли G_3III имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_1, \\ \bar{x}^2 = x^2 + t_2, \\ \bar{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \quad (7)$$

4. C_3IV .

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, \quad [X_2, X_3] = X_1 + X_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\ \Lambda(X_1) &= \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} e^{t_1\rho(X_1)} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right), \\ e^{t_3\rho(X_3)} &= \left(\begin{array}{ccc|c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t_3^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t_3^n}{(n-1)!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t_3^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (e^{-t_3}x^1 + t_3e^{-t_3}x_2, e^{-t_3}x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, группа Ли G_3IV имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_3e^{-t_3}x^2 + t_1, \\ \bar{x}^2 = e^{-t_3}x^2 + t_2, \\ \bar{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \quad (9)$$

5. C_3V .

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\ \Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right), \\ e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-t_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (e^{-t_3}x^1, e^{-t_3}x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, группа Ли G_3V имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_1, \\ \bar{x}^2 = e^{-t_3}x^2 + t_2, \\ \bar{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \quad (11)$$

6. C_3VI .

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = qX_2 \quad (q \neq 0, 1), \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\ \Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array} \right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array} \right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-t_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-qt_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (e^{-t_3}x^1, e^{-qt_3}x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, группа Ли G_3VI имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_1, \\ \bar{x}^2 = e^{-qt_3}x^2 + t_2, \\ \bar{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \tag{13}$$

7. C_3VII .

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2 \quad (q^2 < 1), \quad [X_3, X_1] = -X_2,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array} \right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array} \right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-\frac{t_3q}{2}}A(t_3) & 2e^{-\frac{t_3q}{2}}B(t_3) & 0 & 0 \\ -2e^{-\frac{t_3q}{2}}B(t_3) & e^{-\frac{t_3q}{2}}C(t_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A(t) &= \cos \frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^2-4|}} + \frac{q}{\sqrt{|q^2-4|}} \sin \frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^4-4|}}, \\ B(t) &= \frac{1}{\sqrt{|q^2-4|}} \sin \frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^4-4|}}, \\ C(t) &= \cos \frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^2-4|}} - \frac{q}{\sqrt{|q^2-4|}} \sin \frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^4-4|}}. \end{aligned}$$

Соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (e^{\frac{-t_3 q}{2}} [A(t_3)x^1 + 2B(t_3)x^2], e^{\frac{-t_3 q}{2}} [-2B(t_3)x^1 + C(t_3)x^2], x^3 + t_3). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, группа Ли G_3VII имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = e^{\frac{-t_3 q}{2}} [A(t_3)x^1 + 2B(t_3)x^2] + t_1, \\ \bar{x}^2 = e^{\frac{-t_3 q}{2}} [-2B(t_3)x^1 + C(t_3)x^2] + t_2, \\ \bar{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \quad (15)$$

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Yamaguchi S. On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups // *Memories of the Faculty of Science, Kyushu Univ., Ser. A.* 1979. V. 33, No. 2. P. 209–218.
2. Yamaguchi S. Supplements to "On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups" // *Memories of the Faculty of Science, Kyushu Univ., Ser. A.* 1979. V. 33, No. 2. P. 219–223.
3. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: ФМ, 1961.

**AFFINE REPRESENTATIONS AS LIE GROUPS OF TRANSFORMATIONS
OF THREE-DIMENSIONAL SOLVABLE LIE GROUPS**

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

G.B. Goldina

Student, e-mail: zoloto13@list.ru

A.N. Kabanov

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: kabanovan@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Using the Yamaguchi method, we give the representations as Lie groups of affine transformations of all three-dimensional solvable Lie groups.

Keywords: Affine structures, affine representation, three-dimensional solvable Lie groups.

Дата поступления в редакцию: 30.04.2018