

Оператор волнового взаимодействия и его применение**77-30569/246173**

10, октябрь 2011

Феоктистов В. В., Мякинник О. О.

УДК 517.952

МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru**1. Введение**

Рассмотрим систему уравнений

$$E \frac{\partial \vec{B}(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial \vec{B}(t, x)}{\partial x_k}, \quad (1)$$

$$\vec{B}(t, x) = (B_1(t, x), \dots, B_n(t, x))^T, \quad x = (x_1, \dots, x_s),$$

где $\vec{B}(t, x)$ — неизвестная n -мерная вектор-функция $(s+1)$ аргументов, A_k — квадратные числовые некоммутативные, вообще говоря, матрицы порядка n с элементами $\{a_{ij}^k\}_{i,j=1}^n$, E — единичная матрица. Система разрешена относительно производной по t , представляет собой нормальную форму системы линейных однородных уравнений в частных производных 1-го порядка и является системой Ковалевской [3].

В [4] для системы дифференциальных уравнений поставлена задача построить решение, в котором используется матричная запись коэффициентов. Система (1) задана, если задана последовательность коэффициентов при производных в ее правой части. Выясним каким образом матрицы A_k , $k = \overline{1, s}$, могут быть включены в решение системы (1).

2. Коммутатор бегущих волн

Рассмотрим последовательность произвольных числовых матриц размера $n \times n$ и соответствующую ей последовательность независимых переменных:

$$(A_1, \dots, A_p), \quad (x_1, \dots, x_p), \quad p = \overline{1, s}. \quad (2)$$

Из элементов (2) построим линейные комбинации

$$X_k = (Ex_k + tA_k), \quad k = \overline{1, p}, \quad (3)$$

где E — единичная матрица соответствующего размера, t — независимая переменная, которая не содержится в (2). При $n = 1$ выражения (3) являются p независимыми первыми интегралами системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{E dx_1}{A_1} = \frac{E dx_2}{A_2} = \dots = \frac{E dx_p}{A_p} = -E dt$$

и такими решениями уравнения в частных производных (1), которые имеют форму элементарной волны [1] и по определению принимают постоянное значение C_k на плоскости (x_k, t) :

$$(Ex_k + A_k t) = C_k, \quad C_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, p}. \quad (4)$$

При $n = 1, p = 1$ прямые (4) представляют собой характеристики уравнения (1) [2].

Пусть $n > 1$, C_k — числовые матрицы размера $n \times n$. Следуя [1], примем за определение волны ее свойство сохранять постоянным некоторый параметр (или совокупность параметров). Рассмотрим с этой точки зрения построенные выражения (3) и (4). Если переменная t отвечает физическому времени, а переменные x_k являются пространственными, то говорят о распространяющейся [1] или бегущей волне [3]. Сохранив в названии аналогию со скалярным случаем, при $n > 1$ будем называть выражения (3) бегущими волнами с матричными коэффициентами, опуская в некоторых случаях указание на размерность.

Каждая из бегущих волн (3) является решением системы (1), но содержит только одну пространственную переменную и соответствующий ей коэффициент при производной. При попытке построить функцию s бегущих волн, включая в решение все задающие систему коэффициенты $A_k, k = \overline{1, s}$, возникает проблема некоммутативности умножения матриц.

Поставим в соответствие последовательностям (2) множество V_p , элементами которого являются матрицы A_k , построенные на их основе бегущие волны X_k , а также любые их степени с натуральным показателем:

$$A_k^{\alpha_k} \in V_p, \quad X_k^{\alpha_k} \in V_p, \quad X_k = (Ex_k + tA_k), \quad \alpha_k \in N_0, \quad k = \overline{1, p}. \quad (5)$$

Рассмотрим на элементах множества V_p коммутатор:

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &\equiv A_i A_j - A_j A_i, \\ [A_i, X_j] &\equiv A_i X_j - X_j A_i, \\ [X_i, X_j] &\equiv X_i X_j - X_j X_i, \quad i, j = \overline{1, p}. \end{aligned} \quad (6)$$

При $i = j$ результат действия коммутатора на матрицы A_i и X_i равен нулю, поскольку произвольная матрица коммутирует с одноименной волной. Действие коммутатора на волны обладает следующими свойствами:

$$[A_i, X_j] = [X_i, A_j], \quad (7)$$

$$[X_i, X_j] = t \cdot [A_i, X_j] \quad i, j = \overline{1, p}. \quad (8)$$

Для проверки достаточно раскрыть квадратные и круглые скобки, воспользовавшись их определением (6) и (3). Принимая во внимание название аргументов коммутатора, назовем операцию (6) на множестве V_p коммутатором волн.

Таким образом, для последовательности произвольных числовых матриц (2) и построенных на основе этих матриц бегущих волн (3) имеют место перестановочные свойства (7)–(8).

3. Оператор волнового взаимодействия и его свойства

Введем обозначение

$$W_p^\alpha \equiv W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \dots, X_p^{\alpha_p}), \quad (9)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p), \quad \|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p,$$

для оператора, заданного на множестве (5). Нижний индекс p задает число волн-аргументов, мультииндекс α размерности p определяет порядок вхождения каждой из p волн. Если явно указаны аргументы оператора и их порядок, то индексы при W будем опускать. Рассмотрим оператор (9), который обладает следующими свойствами:

$$W_p^{(0, \dots, \alpha_k, \dots, 0)} = W(X_k^{\alpha_k}) = X_k^{\alpha_k}, \quad W_p^{(0, \dots, 0)} = E, \quad k = \overline{1, p}, \quad (10)$$

$$W_p^{(1, \dots, 1)} = \sum_{k=1}^p X_k W(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_p), \quad (11)$$

$$W_p^\alpha = \sum_{k=1}^p X_k W(X_1^{\alpha_1}, \dots, X_k^{(\alpha_k-1)}, \dots, X_p^{\alpha_p}). \quad (12)$$

Под действием оператора по мультииндексу произвольной размерности на волны, связанные с направлением, которое выделено единственной ненулевой компонентой мультииндекса (Свойство (10)), будем понимать действие единичного оператора; оператор по мультииндексу с нулевыми компонентами представляет собой единичную матрицу.

Рассмотрим оператор по мультииндексу α , длина которого $\|\alpha\|$ равна его размерности p (Свойство (11)). Аргументами оператора являются p разноименных волн. В результате действия оператора получим сумму всех возможных произведений волн-аргументов. Действительно, пусть все компоненты трехмерного мультииндекса равны единице:

$$p = 3, \quad \alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1).$$

Тогда в соответствии с (11) получим следующий результат действия оператора:

$$\begin{aligned} W_3^{(1,1,1)} &= X_1 W^{(0,1,1)} + X_2 W^{(1,0,1)} + X_3 W^{(1,1,0)} = \\ &= X_1 (X_2 W(X_3) + X_3 W(X_2)) + \\ &\quad + X_2 (X_1 W(X_3) + X_3 W(X_1)) + \\ &\quad + X_3 (X_1 W(X_2) + X_2 W(X_1)) = \\ &= X_1 X_2 X_3 + X_1 X_3 X_2 + X_2 X_1 X_3 + X_2 X_3 X_1 + X_3 X_1 X_2 + X_3 X_2 X_1. \end{aligned}$$

Произведение волн будем понимать как их взаимодействие. Таким образом, в (11) рассмотрен результат взаимодействия p разноименных волн с учетом последовательности их взаимодействия.

В (12) под знаком оператора находится p разноименных волн, каждая из которых имеет порядок α_k , задаваемый компонентами мультииндекса α . Рассмотрим действие оператора по двумерному мультииндексу с компонентами 2 и 1:

$$\begin{aligned} W_2^{(2,1)} &= X_1 W_2^{(1,1)} + X_2 W_2^{(2,0)} = \\ &= X_1 \left(X_1 W_2^{(0,1)} + X_2 W_2^{(1,0)} \right) + X_2 W(X_1^2) = \\ &= X_1 (X_1 W(X_2) + X_2 W(X_1)) + X_2 W(X_1^2) = \\ &= X_1 X_1 X_2 + X_1 X_2 X_1 + X_2 (X_1^2) = \\ &= X_1^2 X_2 + X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1^2. \end{aligned}$$

Соотношения (10)–(12) определяют некоторый закон взаимодействия бегущих волн (3). Назовем введенный оператор W_p^α оператором волнового взаимодействия по мультииндексу α размерности p . Назовем $\|\alpha\|$ и p соответственно порядком и размерностью (оператора) волнового взаимодействия. Формула (12) позволяет понижать порядок оператора, формула (11) связывает операторы по мультииндексам разной размерности.

Рассмотрим операции дифференцирования оператора волнового взаимодействия W_p^α . Продифференцируем аргументы оператора:

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = A_k, \quad \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial X_k} = E.$$

Вычислим производную оператора по t в простейшем случае двумерного мультииндекса с единичными компонентами:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_2^{(1,1)} = \frac{\partial}{\partial t} [X_1 X_2 + X_2 X_1] = A_1 X_2 + X_1 A_2 + A_2 X_1 + X_2 A_1.$$

При преобразовании выражений, содержащих элементы множества V_p , будем стремиться выносить матрицы A_k , $k = \overline{1, p}$, в качестве коэффициента слева. Из равенства $[A_1, X_2] = [X_1, A_2]$ следует, что

$$X_1 A_2 + X_2 A_1 = A_2 X_1 + A_1 X_2.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} W_2^{(1,1)} = 2 (A_1 W(X_2) + A_2 W(X_1)). \quad (13)$$

Иногда свойство (7) коммутатора волн удобно применить в виде соотношения

$$A_i X_j + A_j X_i = X_j A_i + X_i A_j, \quad (14)$$

которое в [5] названо свойством коммутативности по сумме произведений.

Если, как и в рассмотренном примере, порядок оператора равен его размерности, то имеет место следующее правило дифференцирования:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} W_p^{(1,\dots,1)} &= \sum_{k=1}^p W(X_1, \dots, X_{k-1}, A_k, X_{k+1}, \dots, X_p) = \\
 &= p \sum_{k=1}^p A_k W(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_p) = \\
 &= p \sum_{k=1}^p A_k W_{p-1}^{(1,\dots,1)}, \quad p = \|\alpha\|, \quad p = \overline{1, s}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В результате дифференцирования по t уменьшилась размерность оператора: каждая из волн X_k , являющихся аргументом оператора, последовательно заменена матрицей, ее образующей; для вынесения матрицы A_k за знак W использовано свойство (7), которым обладает коммутатор волн.

Рассмотрим далее дифференцирование оператора волнового взаимодействия по его аргументу. Выполнение этой операции связано с понижением порядка оператора:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial X_k} W_p^\alpha &= \frac{\partial}{\partial x_k} W(X_1^{\alpha_1}, \dots, X_k^{\alpha_k}, \dots, X_p^{\alpha_p}) = \\
 &= \|\alpha\| W(X_1^{\alpha_1}, \dots, X_k^{(\alpha_k-1)}, \dots, X_p^{\alpha_p}) = \\
 &= \|\alpha\| W_p^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k-1, \dots, \alpha_p)}, \quad p = \overline{1, s}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство правил дифференцирования (15) и (16) для оператора волнового взаимодействия произвольных размерности и порядка приведено в [5].

Из правила дифференцирования (16) вытекает следующее соотношение между частными производными и мультииндексами операторов волнового взаимодействия:

$$\frac{\partial}{\partial X_k} W_p^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} = \frac{\partial}{\partial X_j} W_p^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k-1, \dots, \alpha_j+1, \dots, \alpha_p)}, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{1, p}. \tag{17}$$

Равенство (17) означает, что при изменении волнового взаимодействия фиксированной размерности p и выбранного порядка $\|\alpha\|$ в направлении волны X_k , такие же изменения происходят с "близкими" взаимодействиями таких же размерности и порядка в направлении других волн. Иными словами, если для бегущих волн (3) выбран закон взаимодействия (10)–(12), то изменения происходят равномерно.

Формулы дифференцирования оператора волнового взаимодействия по волне-аргументу (16)–(17) являются следствием свойства (12), которым обладает оператор.

4. Построение решения системы (1)

Рассмотрим обратное соответствие между последовательностью произвольных матриц и системой (1). Пусть A — линейный дифференциальный оператор 1-го порядка, заданный

последовательностями (2):

$$A \equiv \sum_{k=1}^p A_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (18)$$

Пользуясь правилом дифференцирования (16), вычислим действие оператора A на оператор волнового взаимодействия размерности p , аргументами которого являются построенные из элементов (2) бегущие волны (3):

$$A W_p^\alpha = \|\alpha\| \sum_{k=1}^p A_k W_p^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k-1, \dots, \alpha_p)}. \quad (19)$$

Пусть далее L_p — линейный дифференциальный оператор 1-го порядка, отвечающий системе (1) при $s = p$:

$$L_p \equiv [\partial_t - A], \quad \partial_t = E \cdot \partial / \partial t, \quad p \geq 1. \quad (20)$$

Имеют место следующие свойства дифференциального оператора L_p , заданного последовательностью матриц и соответствующей ей последовательностью переменных (2), по отношению к оператору волнового взаимодействия W_p^α , заданного теми же последовательностями:

$$L_p X_k = 0, \quad X_k = (Ex_k + tA_k), \quad k = \overline{1, p}, \quad (21)$$

$$L_p W_p^\alpha = \sum_{k=1}^p X_k L_p W_p^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k-1, \dots, \alpha_p)} = 0, \quad p > 1, \quad (22)$$

$$L_q W_p^\alpha = 0, \quad p < q. \quad (23)$$

Отметим, что свойство (22) является следствием свойства коммутатора волн (7) и определения оператора волнового взаимодействия со свойством (12).

Во введенных терминах и обозначениях сформулируем доказанную в [5] Теорему о разложении решения системы (1) в ряд.

Теорема 1. Система уравнений в частных производных 1-го порядка

$$E \frac{\partial \vec{B}(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial \vec{B}(t, x)}{\partial x_k},$$

где $\vec{B}(t, x)$ — неизвестная n -мерная вектор-функция, A_k — квадратные числовые матрицы порядка n , E — единичная матрица, имеет решение

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, x) &= \sum_{\alpha, \|\alpha\|=0}^{\infty} W_s^\alpha \cdot \vec{\gamma}_\alpha \equiv \sum_{\alpha, \|\alpha\|=0}^{\infty} W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \dots, X_s^{\alpha_s}) \cdot \vec{\gamma}_\alpha, \\ \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad \|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_s, \\ x &= (x_1, \dots, x_s), \quad X_k = (Ex_k + tA_k), \end{aligned} \quad (24)$$

где W_s^α — оператор волнового взаимодействия по мультииндексу α размерности s , $\vec{\gamma}_\alpha$ — n -мерный числовой вектор-коэффициент.

Суммирование в ряде (24) производится по мультииндексу α , отвечающему мультииндексу оператора W_s^α . Размерность оператора равна числу независимых переменных, по которым выполняется дифференцирование в правой части системы. Члены ряда сгруппированы по порядку волнового взаимодействия $\|\alpha\|$. По построению каждый отдельный член ряда (24) и любая его частичная сумма являются решениями системы.

Для доказательства утверждения Теоремы существенно используются свойства коммутатора волн (7)–(8) и соотношение (17) между производными оператора волнового взаимодействия [5].

Решение (24) системы (1) имеет разделенный вид. Разделение выполнено по бегущим волнам, составленным из матричных коэффициентов системы. Назовем сформулированную теорему Теоремой о разложении по бегущим волнам.

5. Заключение

Для (1) построено решение, которое не требует перехода к поэлементной записи коэффициентов системы. Каждый матричный коэффициент системы включен в виде коэффициента при переменной t в бегущую волну. Бегущие волны с матричными коэффициентами рассмотрены в качестве аргументов оператора волнового взаимодействия. Результатом действия оператора является сумма всех возможных произведений волн-аргументов с учетом последовательности умножения матриц. Установлено, что коммутатор волн, построенных для произвольных матриц, обладает перестановочными свойствами, что позволяет решить проблему некоммутативности умножения матриц, задающих систему.

Список литературы

1. *P. L. Bhatnagar* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. Clarendon Press Oxford, 1979 [имеется перевод: *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. — М.: Мир, 1983. — 136 с.].
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир. 829 с.
4. *Скоробогатько В. Я.* Решение системы дифференциальных уравнений матричным методом // ДАН УССР. 1988, т. 3. С. 28–31.
5. *Феоктистов В. В., Мякинник О. О.* Структура ряда для решения системы уравнений с частными производными 1-го порядка // Вестник МГТУ. Серия "Естественные науки". 2009. № 4. С. 3–22.

Wave Interaction Operator and Its Application

77-30569/246173

10, October 2011

V. Feoktistov, O. Miakinnik

Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

The term traveling matrix waves is coined and commutative rules are revealed for the waves. A wave interaction operator is constructed and operator's derivatives are found. The operator is applied to solving the 1st order Cauchy system with numerical matrix coefficients.

References

1. *P. L. Bhatnagar* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. Clarendon Press Oxford, 1979.
2. *Godunov S. K.* Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1979. 392 s.
3. *Courant R.* Uravneniya s chastnymi proizvodnymi. M.: Mir, 1964. 830 s.
4. *Skorobogat'ko V. Ya.* Resheniye sistemy differentsialnykh uravneniy matrichnym metodom // DAN USSR. 1988. T. 3. S. 28–31.
5. *Feoktistov V. V., Miakinnik O. O.* Struktura riada dlia resheniya sistemy uravneniy s chastnymi proizvodnymi 1-go poriadka // Vestnik MGTU. Seriya "Yestestvennye nauki". 2009, N 4. S. 3–22.