



МАТЕМАТИКА

О ДВИЖЕНИИ СВЯЗКИ ДВУХ ТЕЛ
В ПЛОСКОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

В.Л. Воронцова

CONCERNING BAND OF TWO SOLIDS
IN ELLIPTIC ORBIT PLANE

Vorontsova V.L.

The actual problem of space cable system movement on the elliptic orbit is viewed. Generally the attention is paid to the investigation of stability areas.

Рассматривается актуальная задача движения космической тросовой системы по эллиптической орбите. Основное внимание уделено исследованию областей устойчивости.

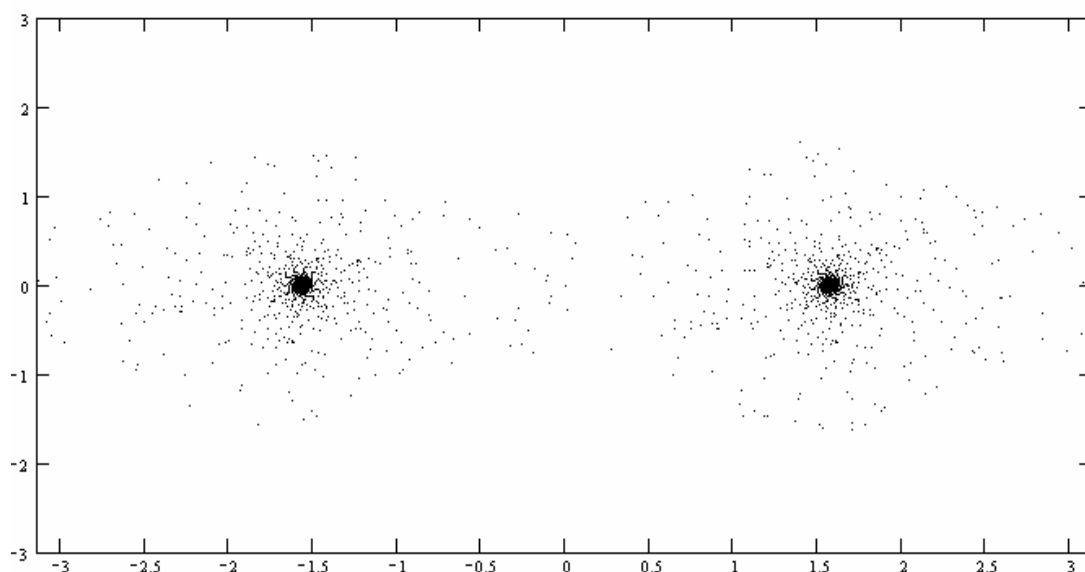
УДК 521.11

В статье рассматривается движение спутника – «гантели» (связка двух тел) в плоскости эллиптической орбиты. Описываются результаты расчета движения гантели согласно уравнению (1) при условии $b \neq 0$ и $k \neq 0$ (частный случай при условии $b = 0$, $k = 0$ был рассмотрен ранее в работе [4]).

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \alpha}{dv^2} - \frac{2e \sin v}{(1+e \cos v)} \left(1 + \frac{d\alpha}{dv} \right) - \\ & - \frac{n^2}{(1+e \cos v)} \sin \alpha \cos \alpha - \\ & - a \frac{\bar{\sigma}(v)}{(1+e \cos v)^4} (1+e^2+2e \cos v) \sin \delta - \\ & - k \frac{\bar{\sigma}(v)(1+e^2+2e \cos v)}{(1+e \cos v)^4} \sin \delta \sin \alpha + \\ & + b \frac{\bar{\sigma}(v) \sqrt{1+e^2+2e \cos v}}{(1+e \cos v)^2} \times \\ & \times (1+\sin^2 \delta) \left(1 + \frac{d\alpha}{dv} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} n^2 &= 3; \quad a = \frac{\rho_\pi P^2}{l} \cdot \frac{(c_2 m_1 - c_1 m_2)}{m_1 m_2}; \\ k &= \frac{\rho_\pi P^2}{H} \cdot \frac{(c_2 m_1^2 + c_1 m_2^2)}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} b &= \rho_\pi P \cdot \frac{c_2 m_1^2 + c_1 m_2^2}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}; \quad P = R_\pi (1+e); \\ \bar{\sigma}(v) &= \exp \left\{ - \int \frac{1 - \cos v}{1 + e \cos v} dv \right\}; \quad \mathcal{K} = \frac{R_\pi}{H} e; \end{aligned} \quad (3)$$

Рис.1. ($a=1$, $e=0.001$, $ж=0.1$, $b=0.001$, $k=1$).

$$\sin \delta = \frac{(1 + e \cos v) \sin \alpha + e \sin v \cos \alpha}{\sqrt{1 + e^2 + 2 e \cos v}}; \quad (4)$$

В уравнении (1) члены с коэффициентами n^2 ($n^2 = 3$), a , k , b описывают соответственно влияние гравитационного градиента; аэродинамического давления; градиента плотности вдоль гантели; аэродинамической диссипации.

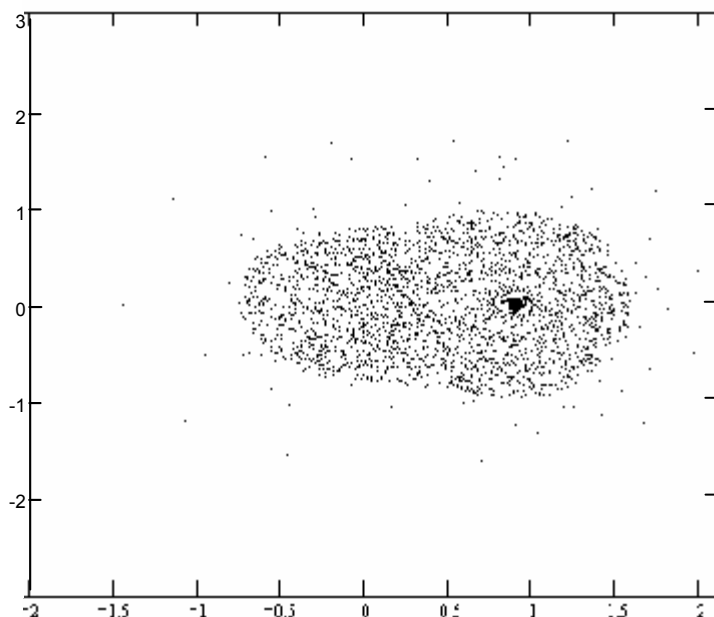
При $e \neq 0$ существенно влияние градиента плотности вдоль орбиты. Это влияние задается функцией $\bar{\sigma}(v)$ и определяется

величиной параметра $ж$. Так как $\frac{R_\pi}{H} \sim 100$,

то даже при малом $e \sim 0.01$ имеем $ж \sim 1$ и $\sigma(v)$ вдоль орбиты меняется на порядок.

Для наглядного представления этих результатов использовалась численная реализация метода точечных отображений. А именно, на фазовую плоскость (α, α') выводились результаты численного интегрирования уравнения (1) только при значениях независимой переменной $v = 2\pi n$,

$n = 0, 1, 2, \dots$. При такой интерпретации периодическому движению на фазовой плоскости отвечает одна единственная точка (2π -периодическое движение), или две точки (4π -периодическое движение). При этом точки, отвечающие устойчивым периодическим движениям, окружены цепочкой точек, отвечающих условно-периодическим движениям. А в окрестности неустойчивых периодических движений рождается беспорядочное множество точек, образующее «слои» хаотического движения. При некоторых условиях эти слои порождают «хаотическое море», в котором взвешены «острова» и «архипелаги» регулярных (периодических и условно-периодических) движений.

Рис.2. ($a=2.5$, $e=0.001$, $ж=0.1$, $b=0.001$, $k=1$).

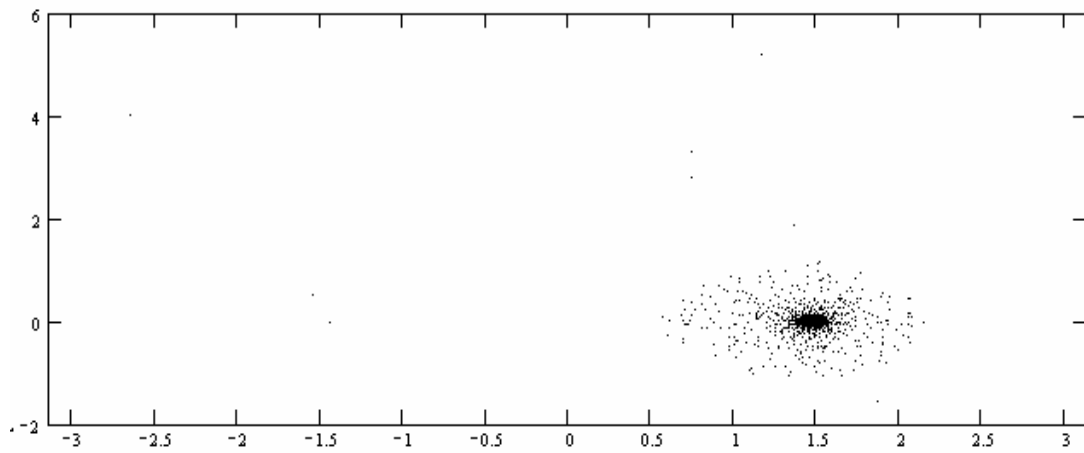


Рис.3. ($a=1.3$, $e=0.005$, $\mathcal{J} = 0.5$, $b=0.001$, $k=1$).

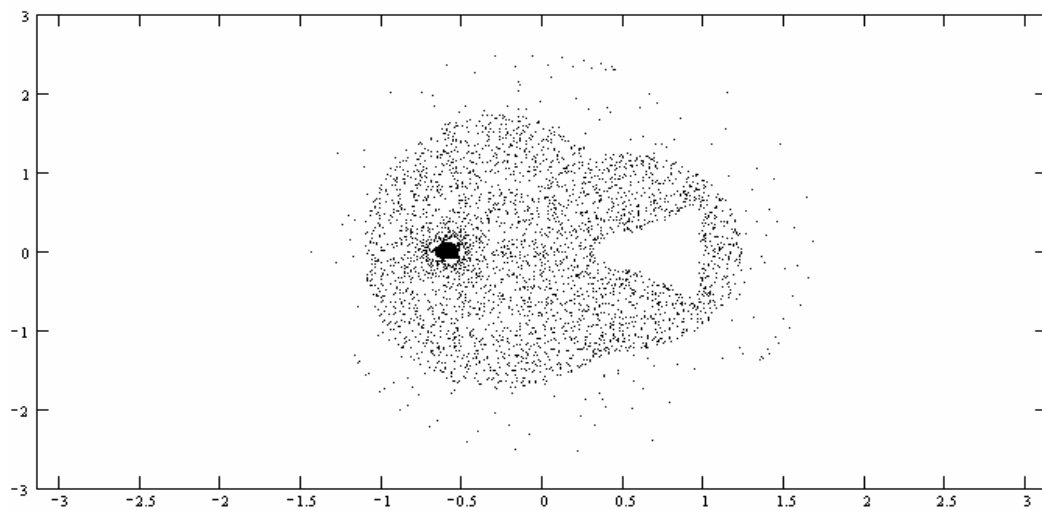


Рис.4. ($a=5$, $e=0.005$, $\mathcal{J} = 0.5$, $b=0.001$, $k=1$).

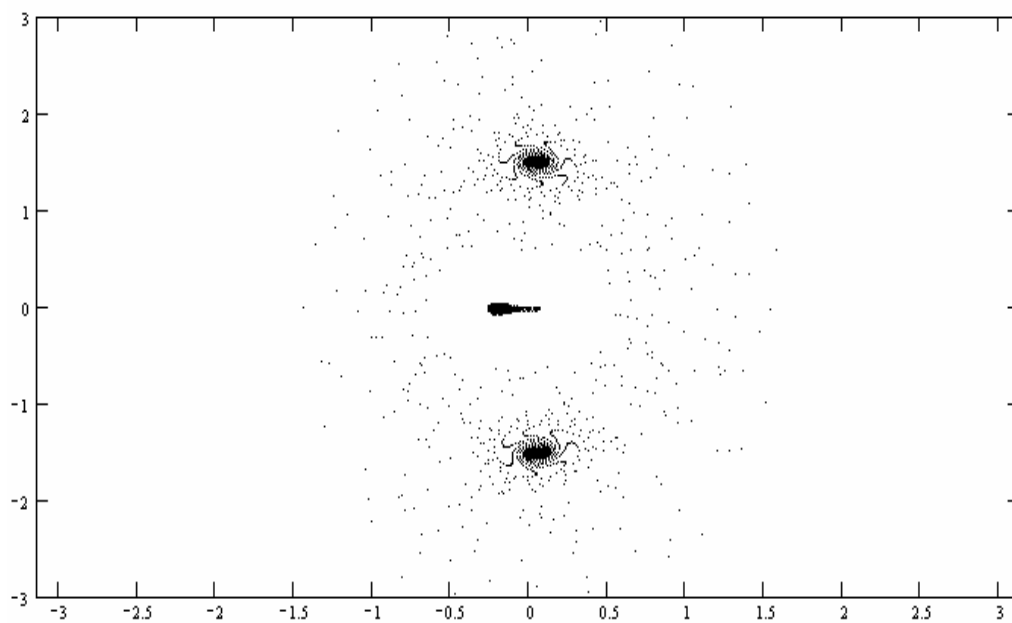


Рис.5. ($a=7.5$, $e=0.005$, $\mathcal{J} = 0.5$, $b=0.001$, $k=1$)



На рис. 1 ($a = 1$, $e = 0.001$, $ж = 0.1$, $b = 0.001$, $k = 1$) наблюдаются два хаотических слоя, рождаемых в окрестностях неустойчивых точек $(\pm\pi, 0)$ и $(0, 0)$. Здесь и ниже принято, что $\frac{R}{H} = 100$, так что $ж = 100e$.

На этом и следующих рисунках указана лишь часть «островов» регулярности; симметрично им относительно значения $\alpha = 0$ расположены аналогичные «острова», не изображенные на рисунке. На рис. 2 ($e = 0.001$, $a = 2.5$, $ж = 0.1$, $b = 0.001$, $k = 1$) внутренний хаотический слой слился в одну хаотическую область нерегулярных колебаний в окрестности трансверсали орбиты.

Сильная хаотизация может иметь место при малых эксцентриситетах орбиты. На рис. 3 ($a = 1.3$, $e = 0.005$, $ж = 0.5$, $b = 0.001$, $k = 1$) есть хаотическая область в окрестности вертикали. На рис. 4 ($a = 5$, $e = 0.005$, $ж = 0.5$, $b = 0.001$, $k = 1$) и рис. 5 ($a = 7.5$, $e = 0.005$, $ж = 0.5$, $b = 0.001$, $k = 1$) видна эволюция фазового портрета с ростом аэродинамического параметра.

Расчеты производились в пакете Mathcad 7.0 для Windows. Сначала уравнение (1) было проинтегрировано с помощью встроенной функции `rkfixed`, которая использует для поиска решения метод Рунге-Кутты четвертого порядка, а затем на фазовую плоскость (α, α') выводились результаты численного интегрирования уравнения (1) толь-

ко при значениях независимой переменной $\nu = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В. Прикладные задачи устойчивости. Препринт ин-та прикладной математики АН СССР. – №121. – М., 1990. – 28 с.
2. Белецкий В.В., Воронцова В.Л. О влиянии градиента плотности атмосферы на вращение и ориентацию гантелеобразного спутника // Вестник МГУ. – Серия математика и механика. – №5. – 2000. – С. 36-39.
3. Белецкий В.В., Пивоваров М.Л. О влиянии атмосферы на относительное движение гантелеобразного спутника // Прикладная математика и механика. – 2000. – № 4.
4. Воронцова В.Л. Влияние аэродинамического градиента на вращательное движение искусственного спутника Земли // Третий международный симпозиум по классической и небесной механике. Август 23-28, 1998 года, Великие Луки, Россия: Тезисы докладов. – Москва – Великие Луки. – 1998. – С. 44 - 45.
5. Воронцова В.Л. Результаты расчетов движения «гантели» в плоскости эллиптической орбиты // Всероссийская конференция «Математическое моделирование в научных исследованиях», сентябрь 27-30, 2000 г. Ставрополь, Россия: Тезисы докладов. – Ставрополь, 2000. – 240 с.

Об авторе

Воронцова Валерия Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики СГУ. Занимается исследованием динамики космических тросовых систем. Автор 8 научных и 3 методических публикаций.