УДК 517.962.2

Динь Хуен Нгуен

УСЛОВИЯ КОНВЕРГЕНЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Введение. Уравнения в конечных разностях широко применяются при описании динамических систем, состояния которых известны (измеряются) в дискретные моменты времени [1, 2]. Разностные уравнения являются основным математическим аппаратом при изучении нелинейных импульсных систем [1]. Системы разностных уравнений также используются для описания динамики численности биологических популяций. Хорошо известны дискретные модели, представляющие собой разностный аналог уравнений Лотки–Вольтерра [3, 4].

Одна из важных задач качественной теории дифференциальных и разностных уравнений – определение условий существования и устойчивости вынужденных почти периодических колебаний, возникающих в нелинейных системах под действием внешних возмущений. С практической точки зрения, особый интерес представляет ситуация, когда указанные колебания режимы асимптотически устойчивы в целом. Такое явление называют конвергенцией [5, 6].

В. И. Зубовым была доказана теорема об условиях почти периодической конвергенции для систем дифференциальных уравнений [6]. Эти условия формулировались в терминах существования функций Ляпунова, обладающих определенными свойствами. С помощью данной теоремы в [6–9] была доказана конвергентность некоторых классов нелинейных систем. В то же время следует заметить, что до сих пор не существует общих конструктивных способов построения функций Ляпунова, удовлетворяющих требованиям теоремы Зубова. В работе Н. Н. Атаевой теорема В. И. Зубова распространена на системы разностных уравнений. Однако в ней не были указаны классы систем, для которых доказанная теорема позволяет получить условия конвергентности.

А. Ю. Александровым для некоторых типов систем дифференциальных уравнений был предложен способ построения функций Ляпунова, удовлетворяющих требованиям теоремы Зубова [7, 8]. В настоящей работе с помощью этого способа и дискретного аналога теоремы Зубова получены достаточные условия конвергенции соответствующих разностных систем.

1. Постановка задачи. В [7, 8] были найдены условия конвергентности для системы дифференциальных уравнений вида

Нгуен Динь Хуен – аспирант кафедры управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель: доктор физико-математических наук, проф. А. Ю. Александров. Количество опубликованных работ: 2. E-mail: dinhhuyenrus@gmail.com.

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= a_{11}f_1(y_1) + a_{12}f_2(y_2) + \varphi_1(t),\\
\dot{y}_2 &= a_{21}f_1(y_1) + a_{22}f_2(y_2) + \varphi_2(t).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь a_{sj} – постоянные коэффициенты; $f_j(y_j)$ – непрерывные при $y_j \in (-\infty, +\infty)$ строго возрастающие функции, удовлетворяющие на любом конечном промежутке условию Липшица, причем $f_j(y_j) \to -\infty$ при $y_j \to -\infty, f_j(y_j) \to +\infty$ при $y_j \to +\infty$; $\varphi_j(t)$ – непрерывные при $t \in (-\infty, +\infty)$ почти периодические функции; $s, j = 1, 2$. Не умаляя общности, можно считать, что $f_j(0) = 0$, $j = 1, 2$.

В качестве функции Ляпунова для уравнений (1) предлагалось выбирать квадратичную форму

$$
V_1(y_1, y_2) = a_{22}a_{21}y_1^2 - 2a_{12}a_{21}y_1y_2 + a_{11}a_{12}y_2^2. \tag{2}
$$

С ее помощью было показано [7, 8], что если $a_{12}a_{21} > 0$, то при выполнении неравенств

$$
a_{11} < 0, \quad a_{22} < 0, \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \tag{3}
$$

система (1) обладает свойством конвергенции.

В настоящей работе рассмотрим соответствующую систему разностных уравнений

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) + h\left(c_1(k) + a_{11}f_1\left(x_1(k)\right) + a_{12}f_2\left(x_2(k)\right)\right),\\
x_2(k+1) &= x_2(k) + h\left(c_2(k) + a_{21}f_1\left(x_1(k)\right) + a_{22}f_2\left(x_2(k)\right)\right),
\end{aligned} \tag{4}
$$

полученную при дискретизации системы (1). Здесь h – положительный параметр (шаг дискретизации), k принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $c_i(k)$ – почти периодические функции ($c_i(k) = \varphi_i(kh)$), $i = 1, 2$.

Определим условия почти периодической конвергенции системы (4). Для решения поставленной задачи будем использовать дискретный аналог теоремы Зубова и предложенный в [7] способ построения функций Ляпунова.

Кроме того, распространим полученные для уравнений (4) результаты на более широкие классы систем. В частности, исследуем асимптотическиое поведение решений некоторых типов дискретных моделей популяционной динамики.

2. Достаточные условия конвергенции двумерных систем. В статье [10] было показано, что для доказательства конвергентности разностных систем на их правые части нужно накладывать дополнительные ограничения по сравнению с известными условиями конвергентности соответствующих систем дифференциальных уравнений. В качестве таких ограничений предлагалось использовать достаточную малость шага дискретизации h, а также глобальное выполнение условия Липшица по фазовым переменным для функций, входящих в правые части разностных уравнений.

Поэтому далее будем считать, что функции $f_j(y_j)$ на всей вещественной оси удовлетворяют условию Липшица, т. е. существует постоянная $L > 0$, для которой при любых $y_j', y_j'' \in (-\infty, +\infty)$ справедливы неравенства $\left|f_j(y_j') - f_j(y_j'')\right| \leqslant L|y_j' - y_j''|$, $j = 1, 2$.

Теорема 1. *Пусть выполнены неравенства* (3) *и* $a_{12}a_{21} \geqslant 0$. *Тогда можно указать число* $h_0 > 0$ *такое, что при всех* $h \in (0, h_0)$ *система* (4) *обладает свойством конвергенции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда, $a_{12} < 0$, $a_{21} < 0$. Функцию Ляпунова выбираем в виде (2). Эта функция положительно определена. Вычислим ее приращение на решениях системы (4). Имеем

$$V_1 = V_1(X(k+1)) - V_1(X(k)) = a_{22}a_{21}\left(x_1^2(k+1) - x_1^2(k)\right) -$$
$$- 2a_{12}a_{21}\left(x_1(k+1)x_2(k+1) - x_1(k)x_2(k)\right) + a_{11}a_{12}\left(x_2^2(k+1) - x_2^2(k)\right).$$

Здесь $X = (x_1, x_2)^*$.

При всех $x_1(k), x_2(k) \in (-\infty, +\infty)$ и $k = 0, \pm 1, \ldots$ справедлива оценка

$$V_1 \leqslant \left(2ha_{21}d + h^2 La_{21}(a_{11} + a_{12})d\right)|x_1(k)|\,|f_1(x_1(k))| +$$
$$+ \left(2ha_{12}d + h^2 La_{12}(a_{22} + a_{21})d\right)|x_2(k)||f_2(x_2(k))| +$$
$$+ \left(2h|a_{21}(a_{22}c_1(k) - a_{12}c_2(k))| + 2h^2 L|a_{21}c_1(k)|d\right)|x_1(k)| +$$
$$+ \left(2h|a_{12}(a_{11}c_2(k) - a_{21}c_1(k))| + 2h^2 L|a_{12}c_2(k)|d\right)|x_2(k)| +$$
$$+ h^2((\left(\sqrt{a_{22}a_{21}}c_1(k) - \sqrt{a_{11}a_{12}}c_2(k)\right)^2 + \sqrt{a_{12}a_{21}}\left(\sqrt{a_{11}a_{22}} - \sqrt{a_{12}a_{21}}\right)\left(c_1^2(k) + c_2^2(k)\right).$$

Пусть

$$0 < h < \min\left\{\frac{-2}{L(a_{11} + a_{12})}, \frac{-2}{L(a_{22} + a_{21})}\right\}. \tag{5}$$

Тогда существуют положительные постоянные A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, при которых выполняется неравенство

$$\Delta V_1 \leqslant -A_1|x_1(k)||f_1(x_1(k))| - A_2|x_2(k)||f_2(x_2(k))| + A_3|x_1(k)| + A_4|x_2(k)| + A_5.$$

Используя свойства функций $f_1(y_1)$ и $f_2(y_2)$, получаем, что если число $R > 0$ достаточно велико, то при $x_1^2(k) + x_2^2(k) > R^2$ справедливо соотношение $\Delta V_1 < 0$. Таким образом, функция V_1 удовлетворяет требованиям дискретного аналога теоремы Йосидзавы [2, 5]. Значит, система (4) равномерно диссипативна.

Наряду с уравнениями (4) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= z_1(k) + h(a_{11}G_1(z_1(k), x_1(k)) + a_{12}G_2(z_2(k), x_2(k))), \\ z_2(k+1) &= z_2(k) + h(a_{21}G_1(z_1(k), x_1(k)) + a_{22}G_2(z_2(k), x_2(k))), \end{aligned} \tag{6}$$

где $G_j(z_j, x_j) = f_j(z_j + x_j) - f_j(x_j)$, $j = 1, 2$. Функцию Ляпунова для системы (6) выбираем в виде

$$V(z_1, z_2) = a_{22}a_{21}z_1^2 - 2a_{12}a_{21}z_1z_2 + a_{11}a_{12}z_2^2.$$

Получим

$$V = 2ha_{21}d|z_1(k)||G_1(z_1(k), x_1(k))| + 2ha_{12}d|z_2(k)||G_2(z_2(k), x_2(k))| +$$
$$+ h^2 a_{11}a_{21}d|G_1(z_1(k), x_1(k))||G_1(z_1(k), x_1(k))| +$$
$$+ h^2 a_{12}a_{22}d|G_2(z_2(k), x_2(k))||G_2(z_2(k), x_2(k))| +$$
$$+ 2h^2 a_{12}a_{21}dG_1(z_1(k), x_1(k))\,G_2(z_2(k), x_2(k)).$$

Используя свойства функций $f_1(y_1), f_2(y_2)$, можно показать, что справедлива оценка

$$V \leqslant h^2 a_{21}d\,(2 + hLa_{11} + hLa_{12})\,|z_1||G_1(z_1(k), x_1(k))| +$$
$$+ h^2 a_{12}d\,(2 + hLa_{22} + hLa_{21})\,|z_2||G_2(z_2(k), x_2(k))|.$$

Значит, при выполнении неравенства (5) функция $\Delta V(x_1, x_2, z_1, z_2)$ отрицательно определена по переменным z_1, z_2.

Таким образом, если для параметра h выполнено неравенство (5), то функции V_1 и V удовлетворяют требованиям дискретного аналога теоремы Зубова [6, 9]. Следовательно, система (4) обладает свойством конвергенции.

В случае, когда $a_{12} > 0, a_{21} > 0$, функции Ляпунова для систем (4) и (6) выбираем в виде

$$\tilde{V}_1 = -V_1, \;\; \tilde{V} = -V.$$

Аналогично предыдущему случаю, нетрудно показать, что при достаточно малых значениях h эти функции удовлетворяют требованиям дискретного аналога теоремы Зубова.

Предположим теперь, что $a_{12} \neq 0, a_{21} = 0$. Тогда систему (4) можно записать так:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + h\left(c_1(k) + a_{11}f_1(x_1(k)) + a_{12}f_2(x_2(k))\right), \tag{7}$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h\left(c_2(k) + a_{22}f_2(x_2(k))\right). \tag{8}$$

Сначала рассмотрим уравнение (8) и соответствующее ему уравнение в отклонениях

$$z_2(k+1) = z_2(k) + ha_{22}\left(f_2(z_2(k) + x_2(k)) - f_2(x_2(k))\right).$$

С помощью функций Ляпунова $V_1(y_2) = y_2^2$ и $V(z_2) = z_2^2$ получаем, что у уравнения (8) существует единственное почти периодическое решение $x_2(k) = \psi_2(k)$, асимптотически устойчивое в целом.

Подставив функцию $\psi_2(k)$ в уравнение (7), имеем

$$x_1(k+1) = x_1(k) + h\left(\tilde{c}_1(k) + a_{11}f_1(x_1(k))\right),$$

где $\tilde{c}_1(k) = c_1(k) + a_{12}f_2(\psi_2(k))$ – почти периодическая функция. У данного уравнения также существует единственное почти периодическое решение $x_1(k) = \psi_1(k)$, асимптотически устойчивое в целом.

Пусть $\xi_1(k) = x_1(k) - \psi_1(k)$, $\xi_2(k) = x_2(k) - \psi_2(k)$. Тогда $\xi_2(k) \to 0$ при $k \to \infty$, а $\xi_1(k)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_1(k+1) = \xi_1(k) + h\left(a_{11}\left(f_1(\psi_1(k) + \xi_1(k)) - f_1(\psi_1(k))\right)\right) + r(k).$$

Здесь $r(k) = a_{12}\left(f_2(\psi_2(k) + y_2(k)) - f_2(\psi_2(k))\right) \to 0$ при $k \to \infty$. Из результатов работы [10] следует, что все решения полученного уравнения стремятся к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, система уравнений (7) и (8) обладает свойством конвергенции, а векторная функция $\psi(k) = (\psi_1(k), \psi_2(k))^*$ – единственное почти периодическое решение этой системы.

Случаи, когда $a_{21} \neq 0, a_{12} = 0$ или $a_{12} = a_{21} = 0$, исследуются аналогичным образом.

Теорема доказана.

3. Некоторое обобщение полученных результатов. Покажем далее, что предложенный в п. 2 способ доказательства конвергентности двумерных систем можно распространить на случай систем, состоящих из произвольного числа уравнений. Рассмотрим систему

$$x_s(k+1) = x_s(k) + h\left(c_s(k) + \sum_{j=1}^{n} a_{sj}f_j(x_j(k))\right), \;\; s = 1, ..., n, \tag{9}$$

где $n > 2$; h – положительный параметр (шаг дискретизации); a_{sj} – постоянные коэффициенты; матрица $A = \{a_{sj}\}$, $s, j = 1, ..., n$, – симметричная; $f_j(y_j)$ – непрерывные при $y_j \in (-\infty, +\infty)$ строго возрастающие функции, удовлетворяющие на всей вещественной оси условию Липшица с константой L, причем $f_j(y_j) \to -\infty$ при $y_j \to -\infty, f_j(y_j) \to +\infty$ при $y_j \to +\infty$; $c_s(k)$ – непрерывные при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ почти периодические функции.

Теорема 2. *Если матрица A отрицательно определена, то можно указать число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0)$ система (9) обладает свойством конвергенции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V_1(X) = -X^* A^{-1} X. \tag{10}$$

Так как матрица A отрицательно определена, то функция V_1 положительно определена. Вычислим приращение функции (10) на решениях системы (9). Имеем

$$\begin{aligned}\Delta V_1 = V_1(X(k+1)) - V_1(X(k)) = -X^*(k+1)A^{-1}X(k+1) + X^*(k)A^{-1}X(k) = \\ = -(X + h(C + Af))^* A^{-1}(X + h(C + Af)) + X^* A^{-1} X = \\ = -hX^*A^{-1}C - hX^*f - hf^*X - hC^*A^{-1}X - h^2\left(f^*C + f^*Af + C^*A^{-1}C + C^*f\right) = \\ = -2h\sum_{i,j=1}^{n} x_i \tilde{a}_{ij} c_j - 2h\sum_{i=1}^{n} x_i f_i - h^2\left(2\sum_{i=1}^{n} c_i f_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i f_j + \sum_{i,j=1}^{n} c_i \tilde{a}_{ij} c_j\right).\end{aligned}$$

Здесь $X(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))^*$, $f(x(k)) = (f_1(x_1(k)), \ldots, f_n(x_n(k)))^*$, $\tilde{a}_{ij}$ – элементы матрицы A^{-1}, $C(k) = (c_1(k), \ldots, c_n(k))^*$.

При всех $x_s(k) \in (-\infty, +\infty)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, справедливы оценки

$$\begin{aligned}\Delta V_1 \leqslant 2h\sum_{i,j=1}^{n} |x_i||\tilde{a}_{ij} c_j| - 2h\sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| + 2h^2\sum_{i=1}^{n} |c_i||f_i| + h^2\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}||f_i||f_j| + \\ + h^2\sum_{i,j=1}^{n} |c_i \tilde{a}_{ij} c_j| \leqslant \frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{n} |x_i|\left(-|f_i| + 4\sum_{j=1}^{n} |c_i \tilde{a}_{ij}|\right) + \frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{n} |f_i|\left(-|x_i| + 4h|c_i|\right) + \\ + \frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i|\left(-1 + 2hL\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) + \frac{1}{2}h\left(-\sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| + 4h\sum_{i,j=1}^{n} |c_i a_{ij} c_j|\right).\end{aligned}$$

Пусть

$$0 < h < \frac{1}{2L\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|}. \tag{11}$$

Используя свойства функций $f_1(y_1), \ldots, f_n(y_n)$, находим, что если число R достаточно велико, то при $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 > R^2$ справедливо соотношение $\Delta V_1 < 0$. Таким образом, функция V_1 удовлетворяет требованиям дискретного аналога теоремы Йосидзавы [2, 5]. Значит, система (9) равномерно диссипативна.

Наряду с уравнениями (9) рассмотрим систему

$$z_s(k+1) = z_s(k) + h\left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\left(f_j(z_j(k) + x_j(k)) - f_j(x_j(k))\right)\right), \quad s = 1, ..., n,$$

для которой в качестве функции Ляпунова выбираем функцию

$$V(Z) = -Z^* A^{-1} Z.$$

Получим

$$\Delta V = -2h\sum_{i=1}^{n} z_i G_i - h^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} G_i G_j.$$

Здесь $G_j = f_j(z_j + x_j) - f_j(x_j)$, $Z = (z_1, \ldots, z_n)^*$. Используя свойства функций $f_1(y_1), \ldots, f_n(y_n)$, можно показать, что справедлива оценка

$$\Delta V \leqslant h \sum_{i=1}^{n} |z_i| \, |f_i(x_i + z_i) - f_i(x_i)| \left(-2 + hL \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Значит, при $0 < h < \dfrac{2}{L \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|}$ функция $\Delta V(X, Z)$ отрицательно определена по переменным $z_1, \ldots, z_n$.

Таким образом, если для параметра h выполнено неравенство (11), то функции V_1 и V удовлетворяют требованиям дискретного аналога теоремы Зубова [6, 9]. Следовательно, система (9) обладает свойством конвергенции.

4. Условия конвергенции дискретной модели динамики популяций. Покажем, что разработанные в настоящей статье подходы к анализу разностных систем можно использовать для исследования асимптотического поведения решений дискретных моделей популяционной динамики. Пусть задана система разностных уравнений

$$x_s(k+1) = x_s(k) \exp \left(h \left(c_s(k) + \sum_{j=1}^{n} a_{sj} f_j(x_j(k)) \right) \right), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

описывающая взаимодействие n видов в биологическом сообществе. Система (12) – дискретный аналог широко известной непрерывной модели типа Лотки–Вольтерра [3, 4, 11, 12].

Будем считать, что в уравнениях (12) функции $f_j(y_j)$ непрерывны при $y_j \in [0; +\infty)$, строго возрастают, $f_j(0) = 0$ и $f_j(y_j) \to +\infty$ при $y_j \to +\infty$; a_{sj} – постоянные коэффиценты, причем $a_{sj} \geqslant 0$ при $s \neq j$, а матрица $A = \{a_{sj}\}$, $s, j = 1, \ldots, n$, является симметричной; $c_s(k)$ – почти периодические функции; $s, j = 1, \ldots, n$. Предположим также, что существует число $\delta > 0$ такое, что $c_s(k) \geqslant \delta$ при всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; s = 1, \ldots, n$.

Систему (12) будем рассматривать в положительном ортанте

$$R_+^n = \{Y : y_i > 0, i = 1, \ldots, n\},$$

который представляет собой инвариантное множество для этой системы.

Определение. Система (12) обладает свойством конвергенции в R_+^n, если она имеет единственное почти периодическое решение, содержащееся в положительном ортанте и являющееся в нем асимптотически устойчивым в целом.

Вводим вспомогательные функции $\tilde{f}_j(y_j) = f_j(e^{y_j})$, $j = 1, \ldots n$. Функции $\tilde{f}_j(y_j)$ определены при всех $y_j \in (-\infty, +\infty)$ и обладают следующими свойствами:

1) $\tilde{f}_j(y_j) > 0$ при $y_j \in (-\infty, +\infty)$;
2) $\tilde{f}_j(y_j)$ строго возрастают на промежутке $(-\infty, +\infty)$;
3) $\tilde{f}_j(y_j) \to 0$ при $y_j \to -\infty$;
4) $\tilde{f}_j(y_j) \to +\infty$ при $y_j \to +\infty$.

Дополнительно предположим, что функции $\tilde{f}_j(y_j)$ на всей вещественной оси удовлетворяют условию Липшица, т. е. существует постоянная $L > 0$, для которой при любых $y_j', y_j'' \in (-\infty, +\infty)$ справедливы неравенства

$$\left| \tilde{f}_j(y_j') - \tilde{f}_j(y_j'') \right| \leqslant L |y_j' - y_j''|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 3. *Если матрица A отрицательно определена, то существует число $h_0 > 0$ такое, что для любых $h \in (0, h_0)$ система* (12) *обладает свойством конвергенции в R^n_+.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведем в уравнениях (12) замену переменных $\xi_s(k) = \ln x_s(k)$, $s = 1, \ldots, n$. Получим систему

$$\xi_s(k+1) = \xi_s(k) + h \left(c_s(k) + \sum_{j=1}^{n} a_{sj} \tilde{f}_j \left(\xi_j(k)\right) \right), \;\; s = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Аналогично доказательству теоремы 2 нетрудно показать, что число $h_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы при всех $h \in (0, h_0)$ система (13) обладала свойством конвергенции в R^n. Но тогда при указанных значениях h система (12) будет обладать свойством конвергенции в R^n_+. Теорема доказана.

Заключение. В работе был исследован дискретный аналог одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью известной функции Ляпунова и дискретного аналога теоремы Зубова определены условия, при которых дискретная система обладает свойством конвергенции. Результаты, полученные для двумерных систем, распространены на системы из произвольного числа уравнений. Выбирая функцию Ляпунова в виде квадратичной формы и пользуясь дискретным аналогом теоремы Йосидзавы, найдены условия для шага дискретизации, при котором дискретная система также обладает свойством конвергенции. Исследовано асимптотическое поведение решений некоторых типов дискретных моделей популяционной динамики.

Литература

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем / пер. с рум. М. И. Букатаря, Г. В. Ножака; под ред. В. П. Рубаника. М.: Мир, 1971. 312 с.

2. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Устойчивость разностных систем. СПб.: Науч.-исслед. ин-т химии С.-Петерб. ун-та, 2003. 112 с.

3. *Александров А. Ю., Платонов А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А.* Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: СОЛО, 2006. 186 с.

4. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

6. *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судостроение, 1962. 632 с.

7. *Александров А. Ю.* Некоторые условия устойчивости и конвергентности нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 4. С. 549–551.

8. *Александров А. Ю.* Достаточные условия конвергентности одной нелинейной системы // Процессы управления и устойчивость: Труды науч. конференции. СПб.: Науч.-исслед. ин-т химии С.-Петерб. ун-та, 2000. С. 37–39.

9. *Атаева Н. Н.* Свойство конвергенции для разностных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2004. Вып. 4. С. 91–98.

10. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* О существовании предельных режимов нелинейных разностных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 3. С. 240–251.

11. *Пых Ю. А.* Равновесия и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 182 с.

12. *Yoshiaki Muroya.* Persistence and global stability in discrete models of Lotka-Volterra type // J. of Math. Analysis and Applications. 2007. Vol. 330, N 1. P. 24–33.

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья принята к печати 16 декабря 2010 г.