УДК 517.956

Ю.В.Малышев

ФАКТОРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Развивается символический метод применительно для дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих факторизацию. Показано, что применение символического метода позволило получить общее решение задачи Гурса, записанное через функцию Римана. Приводятся многочисленные примеры, иллюстрирующие предложенный подход.

Исследуются дифференциальные уравнения в частных производных ,допускающие факторизацию. Применение символического метода позволяет получать общее решение задачи Гурса , записанное через функции Римана. Пусть $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ - оператор дифференцирования по переменной x_k, $\frac{1}{D_k} = \int_{ч_{л0}}^{x_л} \ldots$ - оператор интегрирования , $x = (x_1, \mathbf{K}, x_n)$ – n-мерный вектор, $D=(D_1,\ldots,Dn)$ – оператор градиента ,$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi n)$ – произвольный вектор. Положим $\xi^p=\xi_1^{p1}\ldots\xi_n^{pn}$. Компоненты вектора ξ могут быть числами или операторами, в частности, для $\xi=D$ символ D^p обозначает дифференциальный оператор $D^p = D_1^{p_1} \mathbf{K} D_n^{p_n}$. Порядок дифференциального оператора D^p обозначается через $|p|$, $|p| = p_1 + \mathbf{K} + p_n$. Рассмотрим дифференциальный оператор порядка m: $L_m(D) \equiv \sum_{|p|=m} a^p D^p$, где коэффициенты a^p могут быть постоянными или функциями независимых переменных x [1].

В дальнейшем будем предполагать, что оператор $L_m(D)$ допускает одну из факторизаций:

1. $(D_1 - \alpha_1) \sum_{|p|\le m-1} a^p D^p \quad (\alpha_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1})$,

2. $(\sum_{i=1}^{n} a_i D_i) \sum_{|p|\le m-1} a^p D^p$,

а исследуемые уравнения будут:

1^0 $$(D_1 - \alpha_1) \sum_{|p|\le m-1} a^p D^p u = f ; \qquad (1)$$

2^0 $$(\sum_{i=1}^{n} a_i D_i) \sum_{|p|\le m-1} a^p D^p u = f . \qquad (2)$$

Рассмотрим каждый из указанных случаев отдельно.

1. С помощью формул символического метода [2] уравнение (1) можно представить в виде

$$e^{a_1} D_1 e^{-a_1} \sum_{|p|\le m-1} a^p D^p u = f .$$

Деля обе части полученного соотношения последовательно на экспоненту e^{a_1} и на D_1, получим уравнение, порядок которого понизился на единицу.

$$\sum_{|p|\le m-1} a^p D^p u = e^{a_1} \frac{1}{D_1} e^{-a_1} f + e^{a_1} j_1 ,$$

(j_1 - произвольная функция).

Если оператор $L_{m-1}(D)$ снова допускает факторизацию вида 1^0, то процесс интегрирования можно продолжить. В итоге получим общее решение уравнения (1), зависящее от m произвольных функций $j_i (i = 1, \mathbf{K}, m)$.

Случай 2^0 сводится к случаю 1^0 с помощью некоторых замен переменных. Найдем первые интегралы линейного уравнения $\sum_{i=1}^{n} a_i D_i V = 0$.

Пусть это будут функции $\psi_i(x)$=c, (i=1,…,n-1, c_i=const). Сделаем замену переменных: $\xi_i=\psi_i$, $\xi_n=\psi_n$. Тогда линейный множитель случая 2^0 превратится в линейный множитель случая 1^0.

Действуя как выше, получим символическое представление уравнения (2). Итак, справедлива теорема.

Т е о р е м а 1. Если оператор $L_m(D)$ факторизуем, то уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

Задача Гурса. Найти решение уравнения

$$L_n(D)U=f \tag{3}$$

в области $G=\{x: x^0 \le x \le x^1\}$, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x_1,\dots,x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1},\dots, x_n) = j_i(x_1,\dots,x_{i-1}, x_{i+1},\dots,x_n), \tag{4}$$

при условии согласования

$j_j(x_1,\dots,x_{j-1}, x_{j+1},\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n)= j_i(x_1,\dots,x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1},\dots,x_{i-1}, x_{i+1},\dots, x_n)$, $j<i$ [3].

Рассмотрим оператор $L_n^*(D) \equiv \sum_{|p|\le n}(-1)^p D^p a_p$, сопряженный к оператору $L_m(D)$ [1]. Решение уравнения $L_n^*(D)V=0$ есть функция Римана $V=R(x^0,x)$ со свойствами $R(x,x)\equiv 1, R(x^0,x^0)\equiv 1$. По переменным x^0 функция Римана удовлетворяет уравнениям $L_n(D)U=0$ [3, 6].

Задачу Гурса будем решать в предположении факторизации оператора

$$L_n^*(D)V \equiv \prod_{k=1}^{n}(D_k - a_k)V = 0, \tag{5}$$

где $a_k = a_{kn} = \dfrac{\partial a_k}{\partial x_k}$, $a_k = \int_{x_k^0}^{x_k} a_k(x_1,\mathbf{K},x_{k-1},t_k,x_{k+1},\mathbf{K},x_n)dt_k$.

Символическим методом приведем уравнения (5) к виду

$$e^{a_1}D_1e^{a_2-a_1}\,\mathbf{K}\,D_ne^{-a_n}V=0. \tag{6}$$

Пусть $x=x^0=const$; $j=1,\mathbf{K},n-1$. Из (6) тогда получим $e^{a_n}D_ne^{-a_n}V=0$. Отсюда $e^{-a_n}V=\Psi_n$ (Ψ_n – произвольная функция), $R=e^{a_n}\Psi_n$. Для нахождения Ψ_n положим $x_n=x_n{}^0$. В силу $R(x^0,x^0)\equiv 1$ получим $\Psi_n=1$, то есть $R(x^0,x^0)\big|_{x_i=x_i^0} = e^{a_n(x_1^0,\mathbf{K},x_{n-1}^0,x_n)}$.

Пусть теперь $x_p = x_p{}^0 = \text{const}$, p=1,…,n-2. Решаем уравнения $(D_{n-1}-a_{n-1})(D_n-a_n)V=0$, $e^{a_{n-1}}D_{n-1}e^{a_n-a_{n-1}}D_ne^{-a_n}V=0$. Отсюда: $V\equiv R\big|_{\substack{x_p=x_p^0\\x_n=x_n^0}} = e^{a_n}\dfrac{1}{D_n}e^{a_{n-1}-a_n}\Psi_{n-1}+e^{a_n}\Psi_{n-2}$ (Ψ_{n-1},Ψ_{n-2} – произвольные функции). При $x_n=x_n{}^0$, $R\big|_{\substack{x_p=x_p^0\\x_{n-1}=x_{n-1}^0}} = \Psi_{n-2}$, то есть $j_2 = e^{a_{n-1}(x_1{}^0,\mathbf{K},x_{n-1}^0,x_{n-1},x_n^0)}$.

При $x_{n-1}=x_{n-1}^0$ имеем

$$R\big|_{\substack{x_p=x_p^0\\x_{n-1}=x_{n-1}^0}} = (e^{a_n}\frac{1}{D_n}e^{a_{n-1}-an}\Psi_{n-1})\Big|_{\substack{x_p=x_p^0\\x_{n-1}=x_{n-1}{}^0}} + (e^{a_n}\Psi_{n-2})\Big|_{\substack{x_p=x_p^0\\x_{n-1}=x_{n-1}^0}}$$

(здесь $\Psi_{n-2}=1$ и крайние члены равны , следовательно, $\Psi_{n-1}=0$). Таким образом, $R\big|_{x_p=x_p^0} = (e^{a_n}\Psi_{n-2})\big|_{x_p=x_p^0} = e^{a\ (x_1^0,\mathbf{K},x_{n-2}^0,x_{n-1},x_n)+a_{n-1}(x_1^0,x_2^0,\mathbf{K},x_{n-2}^0,x_{n-1}^0,x_n^0)}$. Продолжая процесс, в общем случае получим экспоненциальное представление функции Римана:

$$R(x,x^\circ)= e^{a_n(x_1,\mathbf{K},x_n)+a_{n-1}(x_1,\mathbf{K},x_{n-1},x_n^0)+\mathbf{K}+a_1(x_1,x_2^0,\mathbf{K},x_n^0)} \equiv \exp\Big\{\int_{x_n^0}^{x_n} a_n(x_1,x_2,\mathbf{K},x_{n-1},t_n)dt_n + \int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}} a_{n-1}(x_1,\mathbf{K},$$

$$t_{n-1},x_n^0)dt_{n-1} + \mathbf{K} + \int_{x_1^0}^{x_1} a_1(t_1,x_2^0,\mathbf{K},x_n^0)dt_1\Big\}. \tag{7}$$

Формула (7) другим способом получена в [3] и [5]. Нетрудно показать, что сопряженным оператором к оператору $L_n^*(D)\equiv\prod_{k=1}^{n}(D_k-a_k)$ будет оператор $L_n(D)\equiv\prod_{k=n}^{1}(D_k+a_k)$.

Отсюда следует теорема 2.

Т е о р е м а 2. Если оператор $L_n(D)$ факторизуем, то и сопряженный к нему оператор $L^*_n(D)$ также факторизуем и, наоборот, из факторизации оператора $L^*_n(D)$ следует факторизация оператора $L_n(D)$.

С л е д с т в и е. Если оператор $L_n(D)$ или $L^*_n(D)$ факторизуем, то уравнение $L_n(D)U=f$ ($L_n^*(D)V=F$) интегрируется в квадратурах.

Доказательство получается интегрированием символическим методом.

Приступим теперь к решению задач Гурса для уравнения

$$L_n(D) \equiv \prod_{k=m}^{1} (D_k + a_k)U = f .$$

Применяя символический метод, получим $\prod_{k=m}^{1} e^{-a_k} D_k e^{a_k - a_{k-1}} U = f \quad (a_0 = 0)$. Окончательно

$$U = e^{-a_1} \frac{1}{D_1} e^{a_1 - a_2} \mathbf{K} \frac{1}{D_n} e^{a_n} f + e^{-a_1} \frac{1}{D_1} e^{a_1 - a_2} \mathbf{K} \frac{1}{D_{n-1}} e^{a_{n-1} - a_n} \Psi_m + \mathbf{K} + e^{-a_1} \frac{1}{D_1} \Psi_2 + e^{-a_1} \Psi_1 . \quad (8)$$

Здесь $\Psi_1,\ldots,\Psi_n$ - произвольные функции, подлежащие определению при выполнении краевых условий.

Пусть $x_n = x^\circ_n$, тогда $\Psi_n = \left[e^{-a_{n-1}} D_{n-1} e^{a_{n-1} - a_{n-2}} \mathbf{K} D_1 e^{a_1} j_n \right]_{x_n = x_n^0}$.

При $x_{n-1} = x^\circ_{n-1}$ имеем

$$\Psi_{n-1} = \left[e^{-a_{n-2}} D_{n-2} e^{a_{n-2} - a_{n-3}} \mathbf{K} D_1 e^{a_1} j_{n-1} \right]_{x_{n-1} = x_{n-1}^0} . \quad (9)$$

При $x_1 = x_1^0 - \Psi_1 = j_1(x_1,\ldots,x_n)$.

Формулы (8), (9) дают решение задачи Гурса. Эти формулы допускают представление через функции Римана и тогда они совпадают с известными формулами [3].

Покажем это для случая n=2. Решим задачу Гурса для уравнения

$$L(D)U \equiv U_{xy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y) \quad (10)$$

в прямоугольнике $D=\{x_0<x<x_1,\ y_0<y<y_1\}$ с краевыми условиями

$$U(x_0,y_0) = j(y),\ U(x,y_0) = \Psi(x),\ j(y_0) = \Psi(x_0). \quad (11)$$

Предполагая, что уравнение (10) факторизуемо, запишем его в виде

$$L(D)U \equiv (D_y + a)(D_x + b)U = f \ (c = ab + by). \quad (12)$$

Сопряженное уравнение будет

$$L^*(D)V \equiv (D_x - a)(D_y - b)V = 0. \quad (13)$$

Обозначим $a=a_y$, $b=b_x$, ($a = \int_{y_0}^{y} a(x,t)dt$, $b = \int_{x_0}^{x} b(t,y)dt$).

Решение уравнения (13) дает функцию Римана для уравнения (12):

$$R(x,y,x_0,y_0) = e^{a(x,y) + b(x,y_0)} = \exp\left\{ \int_{y_0}^{y} a(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} b(t,y_0)dt \right\}.$$

Решение задачи Гурса для уравнения (12), согласно (8)и (9), будет

$$U = e^{-b} \frac{1}{D_x} e^{b-a} \frac{1}{D_y} e^{a} f + e^{-b} \frac{1}{D_x} \left\{ e^{b-a} \left[b\Psi + \Psi' \right] \right\}_{y=y_0} + e^{-b} j . \quad (14)$$

Выразим это решение через функцию Римана. Для этой цели в (14) внесем все экспоненты под знаки интегралов:

$$U = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} e^{-b(x,y) + b(x,y) - a(x,y) + a(x,h)} f(x,h)dhdx + \int_{x_0}^{x} e^{-b(x,y) + b(x,y) - a(x,y)} \left[b(x,y_0)\Psi(x) + \Psi'(x) \right] dx +$$

$$+ e^{-b(x,y)} j(y).$$

Но

$$-b(x,y)+b(x,y)=-\int_{x_0}^{x}b(t,y)+\int_{x_0}^{x}b(t,y)dt=-\int_{x}^{x}b(t,y)dt,$$

$$a(x,y)=\int_{y_0}^{y}a(x,t)dt\,,\quad e^{-b(x,y)}=R(x_0,y;x,y),\quad e^{-\int_{y_0}^{y}a(x,t)dt-\int_{x}^{x}b(t,y)dt}=R(x,y_0;x,y)\,.$$

Интегрируя по частям в интеграле, содержащим Ψ', окончательно получим

$$U=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}R(x,h,x,y)f(x,h)dhdx+\int_{x_0}^{x}[b(x,y_0)R(x,y_0,x,y)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}R(x,y_0,x,y)]\Psi(x)-R(x_0,y_0,x,y)\Psi(x_0)+R(x_0,y,x,y)j(y)\,. \qquad (15)$$

Формула (15) дает решение задачи Гурса для уравнения (10),(11) (с заданной факторизацией (12)).

Рассмотрим уравнение $(Dy+a)(Dx+b)V=0$ при $x=x_0$. Его решение будет

$$R(x_0,y_0,x_0,y)=e^{\int_{y}^{y_0}a(x_0,t)dt}\,.$$

Заменим y_0 на h и продифференцируем по h:

$$\frac{\partial}{\partial b}R(x_0,h,x_0,y)-R(x_0,h,x_0,y)a(x_0,h)=0.$$

Добавим к формуле (15) нулевое слагаемое

$$U=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}R((x,h,x,y)f(x,h)dhdx+\int_{x_0}^{x}[b(x,y_0)R(x,y_0,x,y)-\frac{\partial}{\partial x}R(\xi,y_0,x,y)]\Psi(x)dx+\int_{y_0}^{y}[a(x_0,h)R(x_0,h,x,y)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial h}R(x_0,h,x,y)]j(h)dh+R(x_0,y_0,x,y)\Psi(x)+R(x_0,y_0;x,y)j(y)-R(x_0,y_0;x,y)\Psi(x_0). \qquad (16)$$

Теперь формула (16) совпадает с формулой (1.20) из [3], полученной другим способом без учета факторизации уравнения.

Итак, использование символического метода в случае факторизации дифференциальных уравнений в частных производных облегчает нахождение решений этих уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Курант Р.* Уравнение с частными производными. М.:Мир,1964. 830 с.
2. *Малышев Ю.В.* Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сложными функциями // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2002. Вып. 16. С. 5-9.
3. *Жегалов В.И.,Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими производными. Казань: Казан. мат. о-во. 2001. 227 с.
4. *Триколин Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.:ИИЛ, 1957. 444 с.
5. *Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н.* Функции Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения. Самара: СамГПУ, 1996. 53 с.
6. *Лернер М.Е.* Принципы максимума для уравнений гиперболического типа и новые свойства функции Римана. Самара: СамГТУ, 2001. 113 с.

Поступила 5.03.2003 г.