

4. Blinkov Yu. A., Cid C. F., Gerdt V. P., Plesken W., Roberts D. The MAPLE Package "Janet": 2. Linear Partial Differential Equations. Computer algebra in scientific computing. CASC 2003. Passau, 20 – 26 Sept. 2003. Passau, 2003. P. 41 – 54.

5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. М.: Мир. 1991. Т. 1. 504 с., т. 2. 552 с.

6. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Приложения к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. 364 с.

УДК 517.51

Л. В. Борисова

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЯКОБИ В ТОЧКЕ ЛЕБЕГА

Пусть $\alpha > -1, \beta > -1$ и $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ – последовательность многочленов Якоби, образующих на отрезке $[-1, 1]$ ортонормальную систему веса $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Для любой суммируемой с весом $w(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ функции $f \in L\{-1, 1; (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\}$ положим

$$S_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k^{(\alpha, \beta)}(x),$$

где

$$c_k = \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t) dt$$

и $S_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$ – n -я частная сумма ряда Фурье – Якоби.

Будем говорить, что функция $f \in L[-1, 1; w(x)]$ удовлетворяет условию S_1 , если существует интеграл

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} (1+x)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} |f(x)| dx.$$

Ряд асимптотических формул для ортогональных многочленов позволяет установить связь между сходимостью некоторых связанных с ними рядов Фурье, что является предметом так называемых теорем о равносходимости, которые в сочетании с условиями сходимости рядов Фурье позволяют исследовать сходимости ортогональных разложений. Цель данной статьи – получить необходимые и достаточные условия сходимости ряда Фурье – Якоби в точке Лебега функции $f \in L\{-1, 1; (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\}$, удовлетворяющей условию S_1 . Ряды Фурье – Якоби внутри интервала ортогональности аналогичны рядам Фурье – Лежандра, то есть имеет место

ЛЕММА 1 [1, с. 254]. Пусть $f(x)$ – измеримая в смысле Лебега функция на $[-1, 1]$ и удовлетворяет условию S_1 . Если $S_n(f, \cos \theta)$ означает n -ю частную сумму ряда Фурье (по косинусам) функции

$$(1 - \cos \theta)^{\frac{\alpha+1}{2+4}} (1 + \cos \theta)^{\frac{\beta+1}{2+4}} f(\cos \theta),$$

то в промежутке $-1 < x < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n^{\alpha, \beta}(f, x) - (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} (1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} S_n(f, x)\} = 0$$

равномерно на $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, ε — фиксированное положительное число, $\varepsilon < 1$.

Замечание. Важность леммы 1 состоит в том, что она позволяет применять к задачам сходимости и суммируемости рядов по многочленам Якоби результаты, полученные для аналогичных задач в классической теории тригонометрических рядов Фурье. Таким образом, на основании леммы 1, используя полученный автором [2] критерий сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке Лебега суммируемой периодической функции, методами работ [2, 3] получаем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и функция $f \in L[-1, 1; w(x)]$ удовлетворяет условию S_1 . Если $x \in (-1, 1)$ — точка Лебега функции f , то для того, чтобы ряд Фурье — Якоби этой функции сходилась в точке x к значению $f(x)$, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \frac{1}{2(k+1)} \int_0^1 [\varphi(\theta, \frac{t+2k}{n}\pi) - \varphi(\theta, \frac{t+2k+1}{n}\pi)] \sin \pi t dt = 0, \quad (1)$$

где

$$\varphi(\theta, t) = \Phi(\theta + t) + \Phi(\theta - t),$$

$$\Phi(\theta) = (1 - \cos \theta)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}} (1 + \cos \theta)^{\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}} f(\cos \theta),$$

$$\theta = \arccos x.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и функция $f \in L[-1, 1; w(x)]$ удовлетворяет условию S_1 . Если в точке $x \in (-1, 1)$ существуют предельные значения $f(x+0)$ и $f(x-0)$, то для того, чтобы ряд Фурье — Якоби функции f сходилась в точке x , необходимо и достаточно выполнение равенства (1). При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Тогда для равномерной сходимости ряда Фурье — Якоби функции f на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы условие (1) выполнялось равномерно на $[-1, 1]$.

1. Сега Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
2. Борисова Л. В. Критерий сходимости рядов Фурье – Лагерра в точке Лебега. Саратов, 1988. 16 с. Деп. в ВИНТИ 25.07.1988, №5892-В88.
3. Борисова Л. В. К вопросу о сходимости рядов Фурье – Эрмита // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2.

УДК 519.4

Д. А. Бредихин

О МНОГООБРАЗИЯХ ПОЛУГРУПП ОТНОШЕНИЙ С УНАРНЫМИ ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

В статье находятся базисы тождеств многообразий, порождённых алгебрами отношений с операциями умножения отношений и унарными диофантовыми операциями, задаваемыми с помощью логических формул специального вида.

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру отношений. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Одной из основных проблем в теории алгебр отношений традиционно является изучение их свойств, выраженных на языке тождеств, т.е. рассмотрение соответствующих многообразий, порождённых различными их классами.

Мы будем использовать следующие обозначения: $Var\{\Omega\}$ – многообразие, порожденное классом алгебр, отношений с операциями из Ω ; $Cl\{\Omega\}$ – клон операций, порожденный Ω (множество всех операций, выражимых через операции из Ω).

В теории алгебр отношений обычно рассматриваются операции, задаваемые с помощью логических формул и, в частности, формул различного специального вида. Операция называется диофантовой [3, 4] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [5]), если она может быть задана формулой $\varphi(x, y)$ с двумя свободными переменными x и y , содержащей лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. К числу таких операций, например, относятся операции умножения $\circ$, обращения $^{-1}$ отношений и операции цилиндрификации [6]. Всякой диофантовой операции ω , задаваемой формулой $\varphi(x, y)$, может быть сопоставлен двухплюсник [3, 4, 5] (граф с двумя выделенными вершинами). Вершины этого графа соответствуют переменным формулы $\varphi(x, y)$, две вершины u и v соединены ребром, если атомарная формула вида $(u, v) \in \rho$ входит в запись формулы $\varphi(x, y)$, выделенными вершинами являются вершины x и y .